LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES Y LA CONCEPTUALIZACIÓN

EN EL AULA DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

María Rita Otero
María de los Ángeles Fanaro
Patricia Sureda
Viviana Carolina Llanos
Marcelo Arlego

EDITORIAL DUNKEN

• María Rita Otero • María de los Ángeles Fanaro • Patricia Sureda • Viviana Carolina Llanos • Marcelo Arlego

LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES Y LA CONCEPTUALIZACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICA Y FÍSICA

EDITORIAL DUNKEN

María Rita Otero, es Doctora en Enseñanza de las Ciencias e Investigadora Independiente del Concejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET) en el área de Psicología y Educación. Es Profesora Titular de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), a nivel de grado y de posgrado. Dirige el Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT) de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN y es Coordinadora del Doctorado en Enseñanza de Ciencias de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN.

María de los Ángeles Fanaro, es Doctora en Enseñanza de las Ciencias e Investigadora Adjunta del CONICET en el área de Psicología y Educación. Es Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN, a nivel de grado y de posgrado. Integra el Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT) de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN

Patricia Sureda es Doctora en Enseñanza de las Ciencias, Mención Matemática y Becaria Posdoctoral del CONICET en el área de Psicología y Educación. Es docente de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA. Integra el Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT) de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN.

Viviana Carolina Llanos, es Doctora en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática e Investigadora Asistente del CONICET en el área de Psicología y Educación. Es docente de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN. Integra el Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT) de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN

Marcelo Arlego, es Doctor en Física. Realizó estudios posdoctorales en TU Braunschweig (Alemania) entre 2004 y 2007. Integra el Instituto de Física La Plata (IFLP) de la UNLP. Es Investigador Adjunto del CONICET en el área de Física. Su campo de investigación es la Física teórica: sistemas de electrones fuertemente correlacionados, en particular magnetismo cuántico. En Enseñanza de las ciencias, se interesa por la enseñanza de conceptos cuánticos y en la escuela secundaria. Es docente de Posgrado de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN y colabora con el Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT) de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN

ISBN 978-987-02-7406-3
9 789870 274063

María Rita Otero · María de los Ángeles Fanaro ·
Patricia Sureda · Viviana Carolina Llanos ·
Marcelo Arlego

La Teoría de los Campos Conceptuales y la conceptualización en el aula de Matemática y Física

EDITORIAL DUNKEN
Buenos Aires
2014

La teoría de los campos conceptuales y la conceptualización en el aula de matemática y física / María Rita Otero ... [et.al.]. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de
Buenos Aires : Dunken, 2014.
128 p. ; 23x16 cm.

ISBN 978-987-02-7406-3

1. Enseñanza de la Matemática. I. Otero, Maria Rita
CDD 510.7

Contenido y corrección a cargo de los autores.

Impreso por Editorial Dunken
Ayacucho 357 (C1025AAG) - Capital Federal
Tel/fax: 4954-7700 / 4954-7300
E-mail: *info@dunken.com.ar*
Página web: *www.dunken.com.ar*

Hecho el depósito que prevé la ley 11723
Impreso en la Argentina

e-mail: masamotero@gmail.com
ISBN 978-987-02-7406-3

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

María Rita Otero

Se resumen algunos de los resultados de Investigación de un proyecto íntegramente financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET[1]) y llevado a cabo por un equipo de investigadores y becarios de dicho organismo, que pertenecen al Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

El texto se dirige tanto a los investigadores en Didáctica de las Ciencias y de la Matemática como a los profesores, a los futuros profesores y a todos aquellos que se interesan por la conceptualización en matemática y física.

En particular, las investigaciones que se reportan en este texto se refieren a la enseñanza de la física contemporánea y de la matemática en la escuela secundaria. Para Vergnaud (2013:146) "Didáctica es el estudio de los procesos de transmisión y de apropiación de los conocimientos teniendo en cuenta los contenidos específicos que dichos conocimientos poseen". Algunos investigadores, dejan fuera del ámbito de la didáctica a los procesos de aprendizaje; enfatizando más la dimensión colectiva del proceso de comunicación del conocimiento (institucional o social), que la dimensión personal. Esto suele ser objeto de confusiones, discusiones y controversias, estableciéndose una línea divisoria entre aprendizaje y didáctica, en lugar de una posible complementariedad entre la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica, lo cual no las vuelve homologables.

Sin embargo, la comunicación del conocimiento escolar es factible de ser analizada considerando una u otra dimensión, puesto que no son antagónicas. Los intentos de monopolización del estudio de la enseñanza escolar por parte de unas disciplinas sobre otras, solo conducen a simplificaciones de escasa utilidad, que impiden una aproximación a la complejidad de estos fenómenos.

[1] PIP 112200901-00088 Desarrollo de productos para la Enseñanza de la Matemática y de la Física en el Nivel Medio: análisis didáctico y cognitivo

En nuestra investigación adoptamos un punto de vista instrumental que nos permite analizar la enseñanza de la matemática y de la física escolar, tanto desde marcos teóricos cognitivos como didácticos, respetando las distintas dimensiones y énfasis que realizan unos y otros.

Las investigaciones que aquí reportamos, utilizan la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard y la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) de Vergnaud. En este texto, nos enfocamos en la segunda, que se refiere principalmente a la dimensión cognitiva. Nos interesa describir el proceso de conceptualización de los estudiantes en el aula escolar, analizando la construcción de conceptos a nivel del sujeto que allí aprende.

Es decir, que se analiza la conceptualización en el contexto del aula y tomando en cuenta una enseñanza de ciertas características, inspirada en la pedagogía de la investigación, razón por la cual, no es posible evitar los aspectos didácticos. Para la TCC, la conceptualización se produce en todos los ámbitos de la experiencia humana, el familiar, el de la escolarización obligatoria, el de la formación profesional, el laboral, etc.

En lo que respecta a los conocimientos físicos y matemáticos, la adquisición de conceptos complejos como los involucrados en la física contemporánea, se produce en situaciones de enseñanza que la escuela secundaria puede recrear más probablemente, que ninguna otra institución social.

Esto conduce al análisis del conocimiento de referencia, desde el cual se concebirá la enseñanza, el conocimiento que se pretende enseñar y las transformaciones necesarias, y el que efectivamente es enseñado (Chevallard, 1999,1985). Vistas desde la TCC, estas tres estructuras son a nuestro juicio, más o menos análogas, y no idénticas, a las que la TAD denomina Modelo praxeológico de referencia, organización matemática propuesta para enseñar y organización matemática efectivamente enseñada.

En la TCC, Vergnaud (1990) propone la existencia de dos formas del conocimiento, en interacción, *la forma operatoria*, que permite al sujeto actuar en una situación y *la forma predicativa*, que le permite enunciar y designar a los objetos, así como comunicar su conocimiento. De manera similar, aunque más reductiva, la TAD integra la praxis y el logos en la noción de *praxeología* (Chevallard, 1990), afirmando que las praxeologías permiten *"describir toda actividad humana regularmente realizada"*. En la forma operatoria, la acción no se refiere solo a sus manifestaciones externas, a aquello que se denomina conducta, sino que también incluye los aspectos operatorios e implícitos en la acción, que involucran al pensamiento, a la toma de decisiones, a las anticipaciones e inferencias.

En la TAD en cambio, la praxis aludiría sólo a un componente externo que se hace explícito en el logos, ya que las *praxeologías* se homologan a las organizaciones matemáticas, o no matemáticas, oficialmente reconocidas por una institución. La noción de tarea *"tâche"* es utilizada por ambas teorías.

Es clara la vinculación entre situaciones y tareas realizada por Vergnaud (1990, 2000, 2013), quien define a las situaciones como tareas y se refiere a tipos de situaciones. En la TAD (Chevallard, 1999), a un único tipo de tarea, corresponde una praxeología u organización matemática llamada puntual y varios tipos de tareas pueden encuadrarse en una tecnología y estas en teorías, componiendo praxeologías progresivamente más complejas.

Por su parte, la interacción esquema-situación propuesta por la TCC, implica que sólo cierto tipo de situaciones, habilitan la construcción de esquemas específicos para lidiar con ellas. Pero es preciso ser cauteloso, pues no se puede identificar a las praxeologías, con los esquemas de Vergnaud ni con los conceptos, porque estos dos constructos involucran tanto la forma operatoria –frecuentemente implícita– como la forma predicativa del conocimiento, mientras las praxeologías son explícitas, por su propio logos constitutivo.

Estas correspondencias, permitirían entonces algún tipo de "diálogo local" entre estos dos marcos teóricos, dejando en claro que se trata de teorías bien diferenciadas y propias de disciplinas diferentes como la psicología y la didáctica. Pero a la vez, insistiendo en que la separación en disciplinas es sólo un recurso para tratar la complejidad del "mundo real" y para organizar la multitud de experiencias que conforman el dominio de lo humano.

La Teoría de los Campos Conceptuales propuesta por Vergnaud (1990, 1994, 1996, 1998, 2011, 2013) establece que la conceptualización es la piedra angular del desarrollo cognitivo. Hay una relación dialéctica entre las situaciones y los esquemas. La acción del sujeto es operatoria, pues se utilizan "invariantes operatorios" –*conceptos-en-acción* y *teoremas-en-acción*– que organizan la acción. Un concepto-en-acción es una categoría, una propiedad, un predicado que se considera relevante a la situación y teorema-en-acción es una proposición que se tiene como verdadera respecto a dicha situación. Los invariantes operatorios son implícitos, y no son equiparables con los conceptos ni con los principios científicos, porque éstos últimos son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su validez.

Los conceptos, incluidos los conceptos científicos, son definidos por Vergnaud como una terna compuesta por las situaciones, los invariantes operatorios y los sistemas de símbolos que se usan para representar los conceptos en la comunicación.

En consecuencia, es necesario precisar por un lado, las características epistemológicas de las situaciones, que llamarán a ciertos esquemas y exponer a los estudiantes a este tipo de situaciones. Por otro lado, es necesario identificar los invariantes operatorios: conceptos en acto y teoremas-en-acto, presentes tanto en los esquemas como en los conceptos, para analizar el proceso de conceptualización. Metodológicamente hablando, no basta con analizar la conducta, es preciso considerar la actividad del sujeto en situación (Vergnaud, 2010), puesto que los alumnos se basan en su conocimiento implícito para reconstruir el conocimiento científico explícito, siendo este un proceso progresivo y de largo plazo. Este es el espíritu de las investigaciones que reportamos en los capítulos siguientes.

En el Capítulo 1, María Rita Otero sintetiza aspectos relevantes de la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990,2000,2013), describiendo la forma predicativa y operatoria, los esquemas, los invariantes operatorios y las diferencias entre conceptualización y simbolización, así como el enfoque de Vergnaud relativo a la noción de competencia.

En el Capítulo 2, Patricia Sureda y María Rita Otero analizan la conceptualización de la función exponencial y los sistemas de representación.

En el Capítulo 3, Viviana Carolina Llanos y María Rita Otero describen una investigación referida a la conceptualización de las funciones polinómicas de segundo grado en la escuela secundaria, durante un REI monodisciplinar, en donde se estudia un mismo problema en el marco geométrico y luego, en el marco analítico– geométrico.

En el Capítulo 4, Marcelo Arlego sintetiza algunos aspectos básicos de Mecánica Cuántica, con el objeto de enseñarlos en la escuela secundaria, a partir de una secuencia de situaciones que se presentan en el capítulo siguiente.

En el Capítulo 5, María de los Ángeles Fanaro y María Rita Otero presentan un análisis de la conceptualización relativa aspectos básicos de

Mecánica Cuántica a partir de una secuencia desarrollada en clases de física de la escuela secundaria.

En el Capítulo 6, María Rita Otero, formula algunas conclusiones y perspectivas sobre las investigaciones descriptas en los capítulos anteriores, y sobre las posibilidades que ofrece la TCC para la realización de investigaciones en el área.

CAPÍTULO 1
LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES DE GÉRARD VERGNAUD

María Rita Otero

Introducción

La Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias, tanto en Francia como en el mundo entero, deben mucho a Gérard Vergnaud (1990, 2007, 2013). Su idea de sustituir la interacción sujeto-objeto por la interacción esquema –situación, ha generado diversas investigaciones; al igual que las relaciones que ha trazado entre conceptualización y mediación, y su insistencia en destacar más las coincidencias entre las obras de Piaget y Vigotsky que las diferencias (Vergnaud, 2000).

La distinción entre la *forma operatoria* y la *forma predicativa del conocimiento* y el desarrollo de la noción de competencia, son particularmente útiles a un debate actual en todo el mundo, acerca de cómo los sistemas educativos pueden desarrollar competencias en distintos dominios. Sus ideas aportan precisión al análisis de la actividad en situación, de los esquemas que se ponen en juego, y de las condiciones epistémicas necesarias para producir el desarrollo de la conceptualización en un cierto dominio. Las ideas de Vergnaud, también han sido fecundas en el surgimiento de la llamada didáctica profesional.

Vergnaud, al igual que Piaget, considera indispensable la adopción una perspectiva desarrollista. Pero para Vergnaud, el desarrollo cognitivo es la conceptualización y el dominio progresivo de una diversidad de campos conceptuales. La Teoría de los Campos Conceptuales recrea la noción piagetiana de esquema, ofreciendo entre otras, una definición analítica de sus componentes, donde la noción de invariante operatorio, es un elemento teórico fundamental.

A diferencia de Piaget, la teorización de Vergnaud habilita el estudio del desarrollo cognitivo en los adultos y el aprendizaje de conceptos específicos de cada dominio, como los que tienen lugar en la escuela, en el mundo del trabajo y en el de la formación profesional. Los modelos lógicos de desarrollo del pensamiento, que fueron propuestos por Piaget, no dan cuenta del conocimiento específico en cierto dominio. En cada campo de conocimiento, son necesarios ciertos procesos de conceptualización, que se presentan en ciertos tipos de situaciones y de fenómenos, que convocan al desarrollo de determinadas formas de actividad.

Esto, lleva a Vergnaud a vincular el desarrollo cognitivo en un cierto dominio, con la enseñanza, es decir, con la Didáctica, a la que entiende como *"el estudio de los procesos de transmisión y de apropiación de los conocimientos teniendo en cuenta los contenidos específicos que dichos conocimientos poseen"* (Vergnaud, 2013:146).

La Teoría de los campos conceptuales aporta sustento teórico a esta vinculación. Inicialmente la TCC se centró en el aprendizaje de la matemática, en las estructuras aditivas y multiplicativas, el álgebra elemental y la geometría. Pero posteriormente, fue utilizada en otros dominios como el de la moral, la educación física, la comprensión de textos, la enseñanza de la física, de la química y de las ciencias en general.

Situaciones y Esquemas

¿Por qué la TCC, sustituye la relación sujeto-objeto, por la de esquema-situación?

Para estudiar el aprendizaje de un cierto dominio, se necesita especificar de una manera precisa una relación con esa porción de lo real, que se manifiesta en una *situación*, en *"une tâche"* (tarea). La *situación*, dice Vergnaud (1999:8), *tiene el carácter de tarea y toda situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas*, acerca de las cuales es importante conocer su naturaleza y sus obstáculos.

Una situación, representa una clase de situaciones, con especificidades epistemológicas bien definibles. Como ejemplos de tarea pueden mencionarse: saltar una valla; pilotear un avión, podar una viña; resolver una ecuación; calcular una integral; resolver un problema de interés compuesto, analizar la variación de los parámetros de una familia de funciones, calcular una probabilidad, modelar un sistema físico y predecir su evolución, etc.

Los individuos, se adaptan a las situaciones que enfrentan, pero en realidad, son los esquemas que ellos utilizan en la situación lo que resulta modificado durante la adaptación. Así, una clase de situaciones llama a un cierto tipo de esquemas, que se desarrollan en virtud del tipo de situación.

Hay una relación dialéctica entre situaciones y esquemas, la existencia de unas supone la de los otros.

Las situaciones y la actividad del sujeto en situación, se refieren al aspecto inmediato de la conceptualización, pero hay además un aspecto mediato. Es decir, el desarrollo de los esquemas que permiten dominar un cierto campo conceptual, sólo se produce en el largo plazo, cuando el sujeto es expuesto a una gama de situaciones de cierta clase, durante un tiempo prolongado de la vida, que incluso pueden ser años.

Tal es el caso de la proporcionalidad, que se presenta en múltiples y variadas situaciones: cálculo de materiales y de costos, de resistencia eléctrica, de constantes o variables físicas. También requieren períodos prolongados de conceptualización las funciones no lineales, y la multitud de diferentes relaciones entre variables, cuadráticas, potenciales, exponenciales, logarítmicas, la resolución de una ecuación polinómica de grado mayor o igual a dos; o la noción de probabilidad, presente tanto en múltiples dominios de la vida cotidiana, como las predicciones climáticas o epidemiológicas, o en las leyes de la mecánica cuántica. También es dilatado el proceso de aprendizaje que lleva a la conducción competente de un automóvil, o a la capacidad de mediación en la resolución conflictos, o a la adquisición de una técnica quirúrgica por parte de un médico cirujano.

El desarrollo de competencias, evidencia la existencia de muchos conocimientos implícitos en la acción, que rara vez se expresan verbalmente, porque resulta difícil o directamente imposible hacerlo. Un jugador de futbol, reconocido por sus habilidades en el campo de juego, no puede convertir en palabras, el vasto conjunto de conocimientos que sostienen su extraordinaria competencia.

Es decir que las palabras y los textos, sólo dan cuenta de manera imperfecta y aproximada, del conocimiento operatorio que se pone en acto en una situación. Sin embargo, para la conceptualización son tan indispensables, la acción operatoria del sujeto en situación, como el uso de significantes explícitos, debido a que sólo a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver, un concepto adquiere sentido para quien enfrenta una situación.

Esto lleva a Vergnaud a proponer la distinción entre la forma operatoria y la forma predicativa del conocimiento, lo cual, es esencial para explicar que el proceso de conceptualización comienza desde etapas muy tempranas del desarrollo.

Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento

La forma operatoria del conocimiento es la que permite al sujeto actuar en situación y la forma predicativa, consiste en enunciar las relaciones entre los objetos. Es complejo hacer y también lo es, decir qué se hace (Vergnaud, 2007).

Si bien la enseñanza es irremplazable en el proceso de conceptualización, ésta no puede ser reducida a poner en palabras el contenido conceptual de los conocimientos. La enunciación también es esencial en el proceso de conceptualización, las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de la matemática y de la física, ponen de manifiesto tanto la complejidad de las situaciones y de las operaciones de pensamiento necesarias para tratarlas, como los obstáculos que les presentan buena parte de los enunciados y simbolismos matemáticos.

Quizás por esto, algunos investigadores atribuyen las dificultades de las matemáticas al "lenguaje", pero *las matemáticas no son un lenguaje, sino un conocimiento* (Vergnaud, 2007: VIII). Este es un asunto que genera controversias y confusiones para algunos profesores, algunos psicólogos, y para ciertos matemáticos.

Intentamos mostrar en los capítulos siguientes, que el lenguaje, la enunciación y los sistemas de representación tienen un papel de importancia creciente, en la medida que las nociones a conceptualizar se vuelven más y más complejas. A la vez que, las formas que permiten actuar en la situación y las que enuncian las relaciones entre los objetos, no se desarrollan ni en continuidad, ni en simultáneo, sino que permanentemente se producen rupturas entre las formas operatorias y predicativas en la conceptualización (Sureda, Otero, 2013).

Actividad

Uno de los principios fundamentales de la TCC, sostiene que la actividad no es reducible a la conducta, pues el comportamiento es tan sólo la parte visible de la actividad.

¿Pero en qué consiste la actividad?

La actividad, incluye por un lado a la conducta observable, pero también, a los procesos de representación que no son observables. Vergnaud establece que la actividad del sujeto en situación está compuesta por:

- **Gestos**: tales como señalar, mover las manos y el cuerpo, las expresiones faciales, pero también el pensamiento es un gesto.
- **Acciones**: sean estas realizadas directamente sobre los objetos o sobre el ambiente, o acciones interiorizadas como operaciones de pensamiento.
- **Selección de información**: en una situación, el sujeto selecciona la información relevante para él, lo cual está directamente ligado a los esquemas que posee.
- **Invariantes operatorios**: son los **conceptos en acto**, definidos como categorías pertinentes para el sujeto en la situación, y los **teoremas en acto**, o afirmaciones que el sujeto considera verdaderas
- **Reglas de acción**: son reglas del tipo *si... entonces*, cuyo encadenamiento dirige y decide el curso a seguir, orientado a una meta y a submetas.
- **Mecanismos de control** utilizados para evaluar las acciones y establecer si se están cumpliendo o no las metas contenidas en el esquema.

El concepto de esquema es fundamental para entender hasta qué punto la actividad no es reducible a la conducta o al comportamiento.

Si bien una gran parte de nuestro conocimiento es implícito, de esto no se deduce que el conocimiento explícito no sea operacional. Pero una teoría que sólo considere a la matemática o a las ciencias como cuerpos explícitos de conocimiento, no nos permitiría estudiar sino una pequeña parte de lo que de hecho conocemos, ignorando las primeras etapas en la adquisición de nuevos conocimientos, a cualquier edad.

Es innegable el importante papel de las funciones del lenguaje y de los símbolos en el desarrollo mental. Pero, es necesario identificar adecuadamente qué propiedades del significante representan qué propiedades del significado. Las palabras significan cosas diferentes para individuos diferentes, esto resulta evidente en una clase escolar, dónde los significados otorgados por el profesor difieren considerablemente de los de cada estudiante, y de los de los estudiantes entre sí.

En la actividad y en los esquemas intervienen invariantes operatorios, que no necesariamente coinciden con el significado de las palabras. Es nuestro trabajo identificarlos, junto con los otros componentes de los esquemas y de la representación, si intentamos contribuir a que nuestros alumnos desarrollen conceptos y competencias complejas.

Una parte muy importante del conocimiento que poseemos, consiste en competencias, que no pueden ponerse en palabras fácilmente. Ellas nos permiten responder de una manera relativamente automática y eficiente, en una variedad de situaciones del ámbito social, familiar, escolar, laboral, profesional, etc.

Veamos entonces cómo Vergnaud ha definido a las competencias.

Competencias

¿Cómo definir las competencias y cómo establecer si alguien es o no competente en un cierto dominio?

Definición 1

A es más competente que B, si A sabe hacer cualquier cosa que B no sabe hacer (perspectiva diferencial).

Además A es más competente en el tiempo t que en el tiempo t′ si sabe hacer en t cualquier cosa que no sabía hacer en t′ (perspectiva desarrollista).

En esta primera definición, el criterio de evaluación de la competencia es sólo el resultado de la actividad. No importa ni cómo, ni qué se hace: si se sabe cómo sumar dos fracciones de igual denominador o de distinto, si se sabe cómo multiplicar polinomios o dividirlos, etc.

Definición 2

A es más competente en el tiempo t que en el tiempo t′ si A desarrolla una manera mejor de proceder, más rápida, más confiable y mas compatible con la forma de operar de sus pares (Vergnaud, 2013:150).

Esta segunda definición, considera la forma de la actividad y no sólo el resultado. Por ejemplo: A calcula el monto de un plazo fijo a interés compuesto recursivamente, siempre necesita el valor anterior para hallar el siguiente; o luego, A dispone de un instrumento como la relación funcional, que le permite hallar el monto en cualquier período, al inicio, al medio, al final de la capitalización. Siendo esta última, una manera mucho más poderosa de proceder, en términos de economía y de posibilidades, sobre todo si A comprende cómo opera esa relación y la usa adecuadamente.

Definición 3

A es más competente si dispone de un repertorio de recursos alternativos que le permiten utilizar el procedimiento más apropiado para los casos diferentes que se pueden presentar.

Definición 4

A es más competente si frente a una situación nueva o a una categoría nunca encontrada antes, se encuentra menos desprotegido, o duda menos.

Estas cuatro definiciones de la competencia aportadas por Vergnaud (2007,2013), son complementarias e interrelacionadas. No se puede desconsiderar ninguna de ellas. Todas son útiles para valorizar la capacidad de diagnosticar y de resolver un problema, de realizar un juicio, de analizar y de sintetizar, de seleccionar un curso de acción en situaciones conocidas y en situaciones nuevas.

Ser competente, no es sólo repetir el mismo gesto o el mismo razonamiento muchas veces, también se trata de estar capacitado para enfrentar y resolver situaciones nunca antes encontradas.

El dominio profesional en cualquier ámbito, tampoco se basa únicamente en reencontrar las mismas situaciones, sino también en la variedad, y en el reconocimiento de sus diferencias. Pensemos por ejemplo en un médico especialista en cierto ámbito de la salud, o en determinadas enfermedades. Por un lado, tiene que lidiar con ciertas situaciones, donde los síntomas se presentan de manera contingente, o incluso con emergencias, en un tiempo breve, sin reflexionar demasiado, y a la vez, debe ser capaz de improvisar una solución frente a situaciones variadas, o totalmente nuevas.

Este carácter repetitivo y a la vez contingente de las competencias, es aplicable tanto al ámbito profesional como al escolar. En la enseñanza, es necesario estabilizar las competencias adquiridas y volverlas eficaces, y también desestabilizarlas, para permitir su evolución.

Esquemas y Competencias

Es importante destacar, que las competencias son en realidad esquemas, que se ponen en juego en situaciones específicas, de manera relativamente automática y eficiente, lo cual permite predicar acerca de la competencia o no, de un sujeto.

En consecuencia, la evaluación de las competencias no puede restringirse ni reducirse a los resultados, sino incluir también el análisis de la actividad en situación. Tampoco las competencias pueden circunscribirse a lo que ellas tienen de estable, o de experiencia acumulada, pues también deben habilitar para nuevos aprendizajes.

Esta relación dialéctica entre aspectos invariantes e inestables presente en la actividad y en las competencias, está adecuadamente representada por el concepto de esquema.

Para Vergnaud (2013), la interacción dialéctica esquema-situación es la relación teórica central de la psicología del desarrollo y del aprendizaje, de la didáctica y de la pedagogía. Tanto la experiencia como el aprendizaje son producto de la adaptación y como ya fue señalado antes, los esquemas se adaptan a las situaciones en el curso de la actividad. Pero ¿qué son los esquemas?

Vergnaud (1990, 2000, 2007, 2013) propone cuatro definiciones de esquema:

Un esquema es una totalidad dinámica funcional.

Un esquema es una organización invariante de la conducta para una cierta clase de situaciones.

Un esquema está compuesto necesariamente de cuatro clases de componentes:

- *Una meta o varias, sub-metas y anticipaciones*
- *Reglas de acción, de captación y control de la información*
- *Invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto)*
- *Posibles inferencias*

Un esquema, es una función que toma sus valores de entrada dentro de un espacio temporalizado de n dimensiones y que produce sus valores de salida dentro de un espacio igualmente temporalizado de n' dimensiones, siendo n y n' muy grandes.

La primera definición coincide con la de Piaget, la *totalidad dinámica funcional* a la que se refiere, es la idea que Piaget aplicaba a cualquier actividad.

La segunda definición, enuncia el carácter universal de los esquemas. Como ellos se relacionan con una clase de situaciones, se los puede formalizar utilizando cuantificadores universales. Al comienzo de la conceptualización los esquemas son pequeños, locales y luego, el sujeto los ampliará en el curso del desarrollo. Pero la actividad puede variar, porque depende de las condiciones, sobre todo en su parte observable, que es la conducta. Lo que permanece invariante es la organización de la actividad, no la actividad en sí (Vergnaud, 1990, 2007, 2013).

Aunque la mayor parte de los esquemas generan conductas estereotipadas, un esquema no es necesariamente un algoritmo, pero *todos los algoritmos son esquemas***.** El análisis de los esquemas requiere inevitablemente analizar la conducta, pero un esquema no es la conducta. Los esquemas son una parte constitutiva de la representación, cuya función es generar la actividad y la conducta, a la vez que se generan a sí mismos en ese proceso.

La tercera definición, permite entender el carácter funcional, adaptativo y esencialmente cognitivo del esquema.

Las metas, submetas y anticipaciones corresponden a lo que se acostumbra llamar la intención, el deseo, la motivación. Las metas no son totalmente conscientes, e incluso puede haber varias en la misma actividad.

Las reglas de acción, de toma de información y de control, expresan el carácter generativo del esquema. Ellas explican cómo se desarrolla y se genera la actividad en su parte observable y no observable. Tanto las acciones de transformación de lo real, como la selección de información y los controles que permiten modificar la conducta cuando esta no es posible, son generadas por las reglas.

Siempre se las puede enunciar como condicionales del tipo "si… entonces". Cuando se exige a los trabajadores o a los deportistas talentosos, a los expertos, a los profesores o a los alumnos, explicar por qué y cómo han realizado una cierta tarea, su respuesta acerca de los razonamientos condicionales que realizan en el camino suele ser evasiva (Vergnaud, 2007). Los sujetos tienden a mencionar una sucesión lineal de acciones: primero se hace esto, después aquello, más adelante…, cuando en realidad momento a momento, muchas condiciones han precedido la elección realizada. El concepto de regla de acción, no es suficiente para analizar la actividad, porque ella no es posible sin selección de información y sin control.

Cuando se quiere comprender qué tipo de relación existe entre las condiciones de la actividad y las formas que ella adopta, se encuentra inevitablemente la pregunta por la conceptualización. Existen relaciones conceptuales entre las condiciones y las actividades. Esta es la razón por la cual Vergnaud (1990) introduce en los esquemas una componente epistémica: los conceptos y los teoremas en acto. Hay esquemas porque hay conceptualización. O, dicho de otro modo, la actividad en situación es engendrada por esquemas que le proveen el sentido a través de los invariantes operatorios.

Los invariantes operatorios, conceptos y teoremas en acto tienen la función de reconocer y de identificar los objetos, sus relaciones, sus propiedades y sus transformaciones. En esto consiste la función de conceptualización y de inferencia. Un teorema en acto se define como una proposición tenida como verdadera en la actividad. Un mismo concepto en acto puede asociarse a numerosos teoremas diferentes, más o menos complejos y no necesariamente verdaderos, dependiendo del grado de elaboración del concepto. Hay una relación dialéctica entre teorema en acto y conceptos en acto, unos no existen sin los otros.

En este sentido, Vergnaud destaca que en las disciplinas científicas y tecnológicas tiene poco sentido decir que un estudiante comprendió un concepto, más bien es importante decir qué teoremas en acto es capaz de utilizar en ésta o aquella situación.

Las inferencias son una componente indispensable para la teoría, porque la actividad en situación nunca es automática, sino controlada por las condiciones, las metas, las reglas.

Las inferencias están presentes en toda actividad porque las acciones nunca no son producto de un estímulo, ni se desarrollan de manera totalmente automática y sin control, y sin toma de información. Para el sujeto, las reglas e inferencias permanecen casi siempre implícitas e incluso inconscientes. Las inferencias y las reglas son fundamentales para la adaptabilidad del esquema.

Estos cuatro componentes de los esquemas, permiten explicar el doble carácter: sistemático y contingente de la estructura de la actividad. La

estructura de la actividad es sistemática porque en numerosas situaciones diferentes se atiene a reglas unívocas (el cálculo proporcional, el cálculo de una probabilidad, la resolución de una ecuación, el control de una central nuclear, el manejo de una maquinaria peligrosa, la realización de un procedimiento quirúrgico, etc.).

Pero también, la actividad se adapta a las situaciones nuevas, donde es preciso responder a contingencias e imprevistos. Por ejemplo, como mostraremos en los capítulos siguientes: los alumnos a los que se les pide operar con curvas, cuando solo conocen la unidad en los ejes, utilizan las propiedades de la multiplicación, las abscisas donde la ordenada es cero, o uno o menos uno, e incluso, pueden aplicar el teorema de Tales de una manera productiva, para obtener una proporción útil, que incluye al resultado que están buscando.

Los alumnos que necesitan calcular cuánto dinero obtendrán al final de una operación bancaria a plazo fijo a interés compuesto, siguen primero un camino lineal, hasta advertir que sólo una aplicación recursiva de la linealidad a intervalos iguales, los conduce al resultado correcto y a una forma de variación no lineal, cuyas características les tomará un largo tiempo desentrañar y más aun, dominar.

También en la misma línea de adaptación a las novedades, presentamos los ejemplos relativos a la física, cuando los alumnos simulan la experiencia de la doble rendija, con perdigones lanzados al azar y encuentran que las probabilidades de detección en la pantalla se suman, y luego, al realizarla con electrones, esto no sucede, y ellos deben encontrar y dar sentido a una expresión que represente la distribución de las detecciones que aparecen en la pantalla, donde hay zonas que tienen probabilidad cero de detectar la llegada de un electrón.

En este hecho asombroso que consiste en la capacidad de dar sentido y resolver una situación nueva, los invariantes operatorios cumplen un papel esencial, en el reconocimiento de los objetos, y el establecimiento de relaciones. Ellos emergen en la interacción del esquema con la situación, bien porque existían antes, porque se recombinaron o se modificaron para generar algo nuevo. Es la función de conceptualización, lo que permite que los esquemas se adapten a la novedad y a la variedad.

Campo conceptual y campo de experiencia

Vergnaud (1990) define un Campo Conceptual como un conjunto estructurado de clases de situaciones. El tratamiento de las situaciones requiere distintos tipos de esquemas, conceptos, procedimientos y representaciones, estrechamente relacionados.

La experiencia es el encuentro del sujeto con situaciones. El campo de experiencia de una persona es tan vasto y pleno de situaciones y de registros de actividad que resulta en los hechos, imposible analizarlo como un sistema. Contrariamente, un campo conceptual puede pensarse como un conjunto de conceptos que forman un sistema referido a una clase de situaciones, y que se originan en la actividad del sujeto en esas situaciones (Vergnaud, 2013).

El campo conceptual es entonces un recurso teórico y metodológico para analizar el desarrollo de las competencias y de las conceptualizaciones del sujeto dentro de los distintos registros de su actividad. Para lo cual es preciso recortar objetos de estudio más pequeños que la experiencia como un todo (Vergnaud, 2013).

Hasta ahora hemos descripto los campos conceptuales, los esquemas y los conceptos en acto, estos últimos, no son los conceptos más o menos definidos a los que alude la ciencia y la tecnología, veamos entonces ¿cómo se define a un concepto en la TCC?

Concepto

Vergnaud propone una definición pragmática –útil y funcional– del concepto, al igual que de todos los constructos de su teoría.

Un concepto puede definirse como un triplete de tres conjuntos distintos, que no son independientes entre sí, (Vergnaud, 2013:156)

$$\textit{Concepto} = \textit{def}\,(S, I, L)$$

S: es el conjunto de las situaciones que le dan sentido al concepto,

I: es el conjunto de los invariantes operatorios que integran los esquemas, evocados en las situaciones,

L: es el conjunto de las representaciones lingüísticas y simbólicas (algebraicas, gráficas, etc.) que permiten representar los conceptos y sus relaciones.

La definición evidencia que los conceptos, están compuestos de un elemento propio del sujeto, como los invariantes operatorios presentes en los esquemas, de un elemento objetivo de carácter epistémico, como los tipos de situaciones, las cuales a su vez interactúan dialécticamente con los esquemas, y de un elemento semiótico, que se refiere a los sistemas de signos o de representación, utilizados para enunciar los conceptos, las relaciones entre ellos y para referirse a los objetos.

Significantes, significados y conceptualización

Es importante no confundir significantes con significados. Las palabras asumen muchos significados, dependiendo de la situación. Pero por otro lado, el sentido otorgado por el sujeto sólo corresponde parcialmente y a veces no del todo, al significado convencional de palabras y enunciados, o a aquel que le otorga el maestro, el profesor u otro.

Según Vergnaud (2000), Vigotsky analiza esto en el último capítulo de Pensamiento y lenguaje, donde él se aparta de su primera definición de concepto, como *"significado de las palabras"* para introducir la idea de *"sentido".* Vergnaud (2000) menciona también, que Piaget tenía el hábito de decir: *"los sentidos, son los esquemas".* Más precisamente, Vergnaud dirá que el sentido está dado por los invariantes operatorios presentes en los esquemas.

La teoría de los campos conceptuales aporta un complemento teórico a esta distinción: es necesario distinguir entre significados de la lengua y conceptos, porque la conceptualización comienza tempranamente, desde la acción en situación y la formación de invariantes operatorios. Son estos últimos, los responsables de la diferencia entre sentido y significado.

Tampoco debe confundirse conceptualización con simbolización, porque son procesos diferentes. La conceptualización es la identificación de los objetos del mundo, de sus propiedades, de sus relaciones y transformaciones. Esta identificación puede generarse a partir de la percepción relativamente directa o de la construcción, y ser individual o colectiva, pero siempre se origina en la historia y en la experiencia.

La simbolización, es la utilización con fines comunicativos, de significantes materiales visuales o sonoros, sean estos lingüísticos o no. La comunicación supone la existencia de significados y de conceptualización. Los sistemas de significantes y de significados son compartidos por una comunidad, aunque también pueden ser personales. Ellos tienen un papel destacado en la conceptualización.

¿Qué es la representación?

Pocos conceptos son utilizados con tantos significados diferentes, aun sin ir más allá salir del dominio de la Psicología. Vergnaud (2007) analiza y clarifica cuatro sentidos atribuidos a la a noción de representación los efectos de aportar su manera de entender la representación en psicología.

Sentido 1: la representación es el flujo de la conciencia. La experiencia de este flujo es la prueba más directa de la existencia de la representación como fenómeno psicológico. Todo individuo tiene la experiencia del movimiento casi-permanente de imágenes visuales y auditivas, cinemáticas y somestésicas, que acompañan la vigilia y el sueño. También es consciente de sus gestos y palabras, aún si sólo son esbozados en el pensamiento. Por eso, no estamos en posición de analizarlos bien, simplemente, este movimiento casi continuo de perceptos, de ideas, de imágenes, de palabras y de gestos, más o menos interiorizados, demuestra el hecho de que la representación funciona de manera irreprimible y espontánea en toda ocasión.

El flujo de la percepción es parte del flujo de la conciencia, así como el flujo de las imágenes y del imaginamiento, esté o no asociado a la percepción.

Sentido 2: la representación consiste en los signos y los símbolos, lingüísticos o no, con los cuales nos comunicamos.

Sin signos y símbolos la representación y la experiencia no podrían ser comunicadas. Por otra parte, el trabajo del pensamiento es seguido, acompañado, conducido, por las formas lingüísticas y la manipulación de símbolos. *La numeración y las notaciones algebraicas no son en sí mismas conceptos matemáticos, la notación musical no es la música, pero la ejecución de ciertas obras es impensable sin ella; el lenguaje no es el pensamiento, pero ¿qué sería del pensamiento sin lenguaje?* (Vergnaud, 2007:XII)

Sentido 3: la representación es el sistema de conceptos, explícitos o no, con los cuales un sujeto piensa lo real e identifica los objetos del mundo, sus propiedades, sus relaciones y transformaciones.

Los conceptos que hemos construido, forman un sistema que nos permite relevar la información necesaria para dirigir nuestra acción y nuestra actividad de la manera más pertinente posible. Este significado de la representación es menos evidente que los primeros. Asume la tesis de que la representación comprende la percepción y está estructurada por los conceptos. La palabra concepto se adopta aquí en un sentido amplio, designando constituyentes de diversa naturaleza, que pueden ser totalmente implícitos, mientras que la palabra concepto suele limitarse a los objetos explícitos y tan bien definidos como sea posible. La distinción entre conceptualización y simbolización es esencial: no se debe confundir el segundo sentido de la representación, referido al papel de los signos y símbolos en la conceptualización con el del nivel de los conceptos, en los cuales los signos lingüísticos o no, que permiten enunciarlos, son sólo una parte.

Sentido 4: la representación como un conjunto de esquemas

Para Vergnaud (2000) La funcionalidad de la representación proviene de dos razones principales y complementarias:

Las representaciones organizan la acción, la conducta, y más generalmente la actividad, a la vez que ella misma es producto de la actividad. El concepto de esquema expresa apropiadamente esta idea.

Por otro lado, la representación permite una cierta simulación de lo real, y en consecuencia la anticipación.

Esta última manera de entender la representación, modifica nuestras ideas sobre los tres significados anteriormente mencionados.

El flujo de la conciencia está parcialmente organizado por los esquemas, gracias su doble condición de contingentes –oportunistas– y sistemáticos.

En los esquemas, se encuentra la génesis de los conceptos organizadores de la actividad y de hecho, las actividades lingüísticas y simbólicas son posibles porque desarrollamos esquemas de diálogo y de enunciación.

La conciencia acompaña parcialmente la actividad, pero la estructura de la actividad no es idéntica a la del flujo de la conciencia.

La separación obedece a que solo una parte del funcionamiento del sistema cognitivo en una situación es consciente, como la selección de la información y el control de las consecuencias de la acción.

Por su parte, los conceptos que se ponen en juego en una situación dada, dependen fuertemente de las características de la actividad, de las metas que el sujeto se pone y de las restricciones particulares que dirigen su accionar. Estas restricciones pueden ser reales o imaginarias: de hecho, una segunda propiedad de la conciencia, complementaria de la primera, es la posibilidad de evocar los objetos ausentes o imaginarios, relacionados con la intención, el deseo o la percepción.

Conclusión

Gérard Vergnaud ha realizado valiosas contribuciones teóricas y pragmáticas a la Psicología del Desarrollo, a la Didáctica de la Matemática, a la Didáctica de las Ciencias y a la Didáctica Profesional.

Su ampliación de la noción de esquema y su alejamiento de la generalidad de dominios piagetiana, lo conducen a proponer la interacción esquema-situación, y a la definición de la actividad en situación, como generadora de la experiencia y el aprendizaje del sujeto.

Así mismo, la distinción entre forma operatoria y forma predicativa, es clave en su teoría de la representación y de la conciencia. Esta integración le permite también conciliar los enfoques de Piaget y de Vigotsky, y asignar a la enunciación, al lenguaje y a la actividad productora de símbolos un lugar relevante en la conceptualización y desarrollo de competencias complejas.

La identificación de clases de situaciones, conduce al desarrollo de formas y registros de actividad diferentes, con una organización que se conserva, según las características de cada dominio. Esta organización invariante son los esquemas. Esto va construyendo el equipamiento de representaciones, conceptos y competencias del sujeto.

Esta actividad no es reducible a la conducta observable. A la vez, fiel a la tradición piagetiana, siempre hay un juego dialéctico en las formulaciones de Vergnaud: esquema-situación, conceptos en acto-teorema en acto, experiencia-aprendizaje, estabilización de competencias y desestabilización, forma operatoria-forma predicativa del conocimiento.

Vergnaud define y distingue los procesos de Conceptualización, Simbolización y Representación, interrelacionados, pero no homologables entre sí. Estas distinciones tienen grandes implicaciones para la enseñanza y para la formación profesional.

Actualmente, Vergnaud trabaja en el proceso de construcción de la racionalidad, tomando como base sus ideas anteriores y la historia de las ciencias.

Nuestro equipo, le debe una enorme gratitud, por la generosidad intelectual y personal con la que nos ha brindado su formidable conocimiento, su aliento, su impulso hacia nuevas búsquedas, y por el tiempo que nos ha permitido compartir junto a él, tanto aquí como en Francia.

En los capítulos que continúan presentamos los trabajos que hemos realizado a la luz de las ideas de Vergnaud, intentando sobre todo, compartir algunas experiencias que podrían ser útiles, a quienes se proponen enseñar de una manera que respete y acompañe el desarrollo.

CAPÍTULO 2
LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

PATRICIA SUREDA – MARÍA RITA OTERO

Introducción

La explicitación, discusión y formalización de conceptos matemáticos en diferentes sistemas de representación (SR), es un aspecto central de toda la enseñanza escolar de la matemática. Pero como el uso de los diversos SR resulta transparente para el grueso de los docentes, y para los matemáticos, es habitual que introduzcan un concepto matemático por su definición, y lo utilicen luego, de forma natural, en otros SR. Sin embargo, como la conceptualización de un concepto matemático y su explicitación en diferentes SR, está lejos de ser transparente, los alumnos se encuentran muchas veces perdidos y frustrados.

La conceptualización es mucho más que los sistemas de representación, pero sin duda, no es posible conceptualizar conceptos complejos prescindiendo de algún sistema de representación. Particularmente en la escuela secundaria, es importante propiciar situaciones que demanden el uso de los diversos sistemas de representación que forman parte del concepto, tal como se ha definido en el capítulo anterior.

Conceptualizar no es lo mismo que simbolizar, tanto por la precedencia de las formas operatorias respecto de las predicativas, como por el hecho de que la simbolización requiere también del desarrollo de conceptos e invariantes relativos a cada SR. Entender cómo conceptualizamos a medida que ampliamos nuestro repertorio de sistemas de representación resulta central a la hora de enseñar.

Progresividad en la Conceptualización de las Funciones Exponenciales

Por las propias bases desarrollistas de la TCC, no es posible estudiar la conceptualización de un conocimiento sin estudiar su desarrollo. Luego, como la conceptualización comienza con la acción en situación y la formación de invariantes operatorios, estudiar la conceptualización, es analizar la interacción esquema –situación a lo largo de un tiempo determinado. En particular, identificar los *teoremas en acto* que guían las acciones de los alumnos cuando resuelven situaciones matemáticas en un determinado SR, a la vez que se analiza su modificación o reemplazo.

En esta investigación se diseñaron doce situaciones y tres conjuntos de ejercicios, en cinco sistemas de representación [SR], a saber:

Numérico [SRN]: tablas y cálculos con números,

Algebraico de Primer Orden [SRA1]: procedimientos algebraicos en el que los parámetros están inicializados (ej: $2 \,.\, 5^x = 3$),

Algebraico de Segundo Orden [SRA2]: procedimientos algebraicos en el que los parámetros no están inicializados (ej: $a \,.\, b^x = c$),

Analítico-Gráfico [SRG]: gráfica en ejes cartesianos,

Verbal Escrito [SRVE]: formas linguísticas escritas.

El estudio se llevó a cabo en una escuela secundaria pública de gestión privada. Se realizó un estudio piloto, a partir del cual se ajustaron las situaciones y se implementó en dos cursos de cuarto año (15-16 años). La implementación estuvo a cargo de una profesora que forma parte del grupo de investigación, y duró dos meses y medio. Se registraron las clases en audio y se recogieron las respuestas de 59 alumnos clase a clase. Esto produjo 885 protocolos. Un protocolo es la respuesta de un alumno a una situación o ejercitación. Las respuestas de los alumnos fueron analizadas protocolo a protocolo, y clasificadas en niveles (Sureda & Otero, 2013) según se indica en la tabla 1. Este proceso resultó común a ambos grupos de clase.

Tabla 1

Nivel	Indicador
Lineal [L]	Respuesta Lineal en todos los sistemas de representación.
Parcialmente No Lineal [PNL]	Respuesta No Lineal en por lo menos un sistema de representación.
No Lineal [NL]	Respuesta No Lineal en todos los sistemas de representación.
Parcialmente Exponencial [PE]	Respuesta Exponencial en por lo menos un sistema de representación.
Exponencial [E]	Respuesta Exponencial en todos los sistemas de representación.

Niveles de conceptualización

Debido a un cambio en el diseño curricular, fue necesario volver a ajustar las situaciones, y se volvió a implementar en dos cursos de quinto año (16-17 años), de la misma escuela. El análisis de la resolución de los 56 alumnos clase a clase, permitió reconocer también en estos casos, los cinco niveles mencionados en el proceso de conceptualización de la función exponencial.

A continuación, los niveles se describen uno a uno. En los niveles: lineal, no lineal y exponencial se muestran los teoremas en acto característicos en cada SR. En los niveles que denominamos parcialmente no lineal y parcialmente exponencial no se muestran tablas debido a que los teoremas en acto serán algunos de los ya descriptos en las otras etapas.

Los teoremas en acto son una reconstrucción del investigador a partir del análisis de las respuestas de los alumnos. Esto implica que son una etiqueta. Como tal los teoremas en acto de los alumnos, que muchas veces son implícitos e inconscientes, no son necesariamente literalmente iguales al teorema enunciado. Pero sin duda, lo son en el significado.

Lineal: se denomina así a las producciones de los estudiantes que son lineales en todos los SR. Este tipo de resolución evidencia un sistema de esquemas lineales complejo y completo que se expresa en todos los sistemas de representación.

Los teoremas en acto *lineales* identificados para cada SR son los que se muestran en la tabla 2:

Tabla 2

SRN	"La variable dependiente aumenta o disminuye lo mismo cada vez"

SRA1	"La expresión algebraica es $f(x) = mx + b$. Donde x es la variable independiente; m es la pendiente y b la ordenada al origen"
SRG	"La representación gráfica es una curva recta creciente o decreciente"
SRVE	"Una función es lineal porque la gráfica es una recta"

Descripción de invariantes operatorios, Nivel lineal

Aunque los teoremas en acto utilizados en los distintos SR se centran en diferentes aspectos de la linealidad, la tabla evidencia que son coherentes entre sí.

Parcialmente No Lineal: se caracteriza de este modo a la respuesta parcialmente no lineal, cuando la resolución es *no lineal* en al menos un SR, y lineal en el resto.

En las figuras 1 y 2 se muestra como ejemplo de este nivel, la resolución de un alumno a la primera situación.

Situación 1: Un grupo de chicos tiene $12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del Banco 1 es de 1,1% y les permite tener $12132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del Banco 2 es de 2,2% y les permite tener $12144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del Banco 3 es de 1,3% y les permite tener $12156 cumplido el primer mes.

a) ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?

b) Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores.

c) ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste?

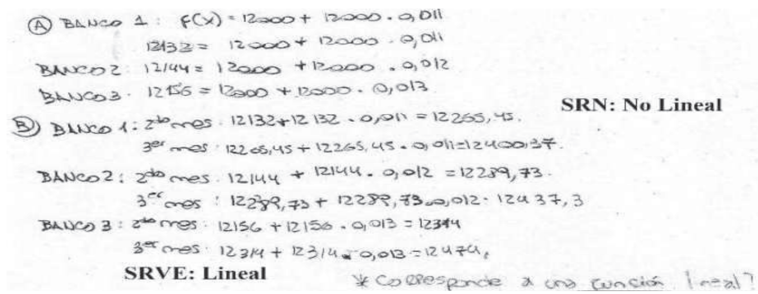


Figura 1: Respuesta numérica y verbal escrita correspondiente al estudiante A15

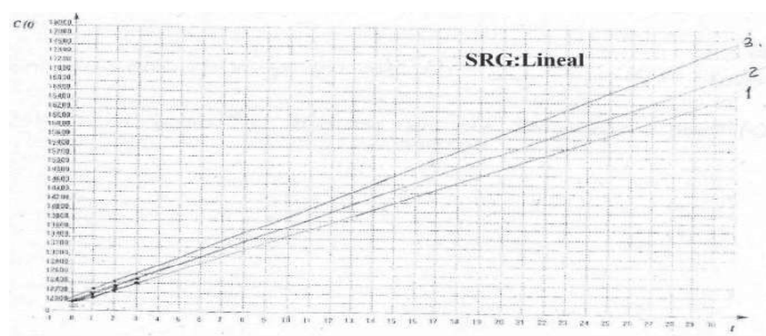


Figura 2: Respuesta gráfica correspondiente al estudiante A15

En general los alumnos respondieron en forma no lineal en el SRN y linealmente en los demás. Ellos calcularon recursivamente el interés simple, de la siguiente manera. *Banco 1 – Mes 1:12000.0,011 + 12000=12132. Mes: 12132.0,011+12132=12265,452*. Esta acción, germen de una acción exponencial, les permite obtener la capitalización compuesta (Figura 1). Para mostrar cómo varía la cantidad de dinero puesto a interés, dibujan tres rectas y luego afirman que graficaron una función lineal (Figura 2).

Las repuestas dadas en los diferentes sistemas de representación son diferentes y contradictorias entre sí.

No lineal: La respuesta se categoriza como no lineal, cuando es no lineal en todos los SR, pero todavía no es una respuesta exponencial. Por ejemplo en el sistema de representación gráfico [SRG] la respuesta no es una recta, pero tampoco es una curva estrictamente creciente.

Los teoremas en acto *no lineales* identificados para cada SR son los que se muestran en la tabla 3:

Tabla 3

SRN	"El aumento se calcula sobre la cantidad inmediata anterior"
SRA1	"La fórmula es $f(x) = x + (1{,}1\% \,.\, x)$. Donde x es el Monto Anterior"
SRG	"La representación gráfica no es una recta"
SRVE	"Si el aumento varía cada vez, no es una función lineal"

Descripción de invariantes operatorios, Nivel no lineal

En esta etapa se advierte un cierto grado de explicitación, pues aun cuando los alumnos no logran la variación exponencial, ellos se dan cuenta de que la variación no es lineal.

Parcialmente Exponencial: se consideran parcialmente exponencial aquellas respuestas que son exponenciales en al menos un sistema de representación, pero no exponenciales en el resto.

En las figuras 2,3 y 4 se muestra como ejemplo de este nivel, la resolución de un alumno a la segunda situación.

En la situación dos se propone la tasa de interés de los tres bancos, el dinero obtenido luego del primer mes de capitalización, y una tabla que muestra la variación de la cantidad de dinero en el primer banco, para los primeros treinta meses. La tabla pone en evidencia que la cantidad de dinero no aumenta lo mismo cada mes, y tiene algunos casilleros vacíos que los alumnos deben completar. En la primera tarea el alumno debe completar los casilleros vacíos y proponer una fórmula. En la segunda tarea tiene que construir tablas similares para los otros dos bancos, y dar las fórmulas. En la tercera determinar dominio e imagen para que sean funciones. Luego, graficarlas en un sistema de ejes cartesianos dado y explicar la diferencia entre este modelo y el anterior.

En la figura 3 se muestra como este alumno calcula y completa los casilleros usando un procedimiento no lineal.

Mes (t)	Monto final del periodo C (t)	Monto al inicio del periodo C (t - 1)	Interés en cada periodo I ((t-1); t)	Tasa i = R/100
0	C(0) = 12000	--	--	--
1	C(1) = 12132	C(0) = 12000	I (0; 1) = 132	0,011
2	C(2) = 12265,452	C(1) = 12132	I (1; 2) = 133,452	0,011
3	C(3) = 12400,37197	C(2) = 12265,452	I (2; 3) = 134,919972	0,011
4	C(4) = 12536,77606	C(3) = 12400,37197	I (3; 4) = 136,4040917	0,011
5	C(5) = 12674,6806	C(4) = 12536,77606	I (4; 5) = 137,9045367	0,011
6	C(6) = 12814,10209	C(5) = 12674,6806	I (5; 6) = 139,4214866	0,011
7	C(7) = 12955,05721	C(6) = 12814,10209	I (6; 7) = 140,955123	0,011
8	C(8) = 13097,56284	C(7) = 12955,05721	I (7; 8) = 142,5056293	0,011
9	C(9) = 13241,63603	C(8) = 13097,56284	I (8; 9) = 144,0731912	0,011
10	C(10) = 13387,29403	C(9) = 13241,63603	I (9; 10) = 145,6579963	0,011
11	C(11)=13524,55426	C(10)=13387,29403		
12	C(12)=13683,43136	C(11)=13524,55426		
13	C(13)=13833,95214	C(12)=13683,43136		
14	C(14)=13986,12561	C(13)=13833,95214		

SRN: No Lineal

Figura 3: Respuesta numérica correspondiente al estudiante A14

En la figura 4 se muestra que este alumno escribe la expresión algebraica $Mf = M_i \, (1 + i)^t$, a la vez que afirma "si a cada monto lo multiplicamos por 1,011 obtenemos el próximo resultado". Esto muestra que la fórmula, fue inferida a partir de la tabla.

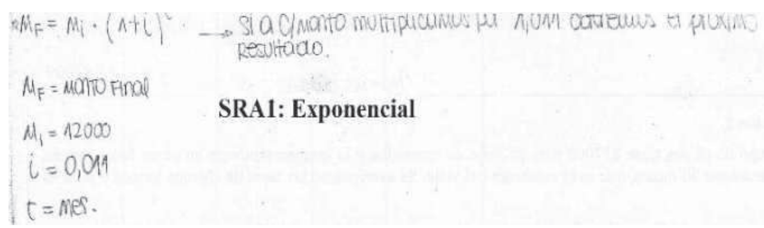


Figura 4: Respuesta algebraica de primer orden correspondiente al estudiante A14.

Luego en el SR gráfico, dibuja tres rectas (Figura 5). Así, este alumno resolvió en forma no lineal en el SRN, exponencialmente en el SRA1 y linealmente en el SRG.

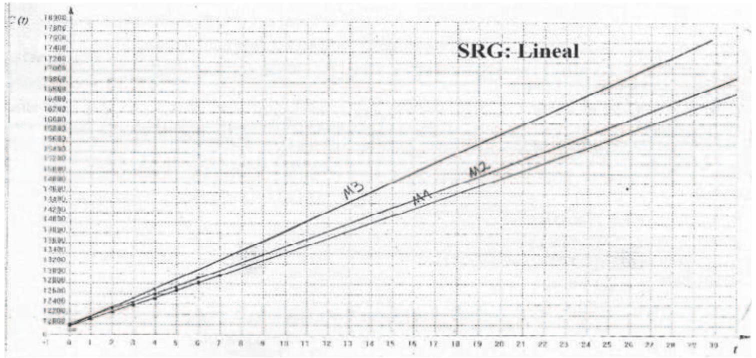


Figura 5: Respuesta grafica correspondiente al estudiante A14

En este nivel los teoremas en acto que dirigen la acción en los diferentes sistemas de representación son contradictorios entre sí. Pero los alumnos no lo advierten. Así, por una parte, el análisis de estas respuestas muestra que en un principio las ideas exponenciales y no exponenciales coexisten. Por otra parte, muestra que resolver adecuadamente un problema en un sistema de representación, no implica que sucederá lo mismo en otro. Es decir que aun cuando los estudiantes acuerdan durante la clase el uso de un sistema de representación, como por ejemplo la fórmula de la función exponencial, esto no es ni inmediata, ni necesariamente reinterpretado en otro sistema de representación, al menos cuando el conocimiento del campo conceptual es incipiente.

Exponencial: Las respuestas se categorizan como exponenciales, cuando son explícitamente exponenciales en todos los sistemas de representación. En este nivel los alumnos logran diferenciar una función exponencial de una que no lo es, en los cuatro sistemas de representación [SRN, SRA1, SRG y SRVE].

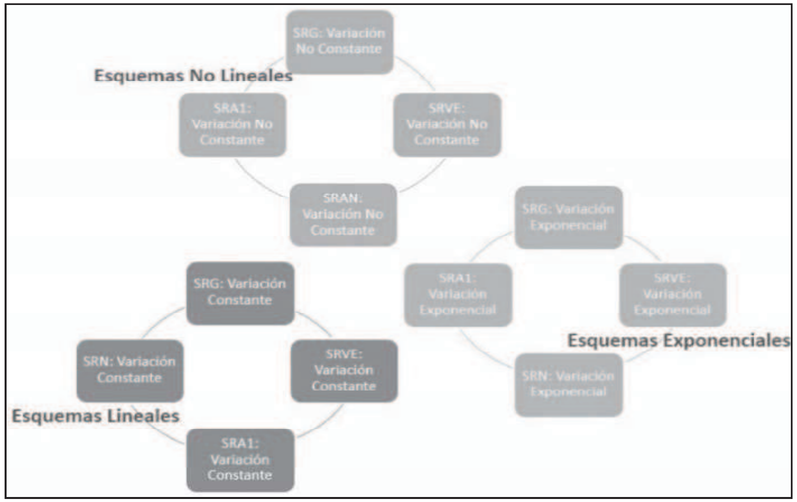
Los teoremas en acto *exponenciales* identificados para cada SR son los que se muestran en la tabla 4:

Tabla 4

SRN	“El aumento se calcula sobre la cantidad inmediata anterior”
SRA1	“La expresión algebraica es: $f(t) = k \, . \, a^t + b$. Donde t es la variable independiente; a es la tasa de crecimiento; k la cantidad inicial y b la asíntota horizontal”
SRG	“La representación gráfica de la variación es una curva estrictamente creciente o decreciente, que posee una asíntota horizontal”
SRVE	“Una función es exponencial porque la variable independiente está en el exponente”

Descripción de invariantes operatorios, Nivel Exponencial

Una característica común a los niveles lineal, no lineal y exponencial, es que los esquemas que dirigen la acción de cada SR, podrían organizarse dentro de un esquema más complejo (Figura 5). Por ejemplo, los esquemas del nivel lineal podrían agruparse dentro de la “variación constante”.



Esquema 1: Esquemas en cada sistema de representación

Es decir, en estos niveles los esquemas que dirigen la acción en cada SR son coherentes entre sí.

El hecho de que esto no suceda en los niveles parcialmente no lineal, y parcialmente exponencial, permite inferir que los esquemas son diferentes, para cada SR.

Sistemas de Representación Diferentes, Esquemas Diferentes

Un esquema es la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones. Esto es, organizaciones diferentes, están dirigidas por invariantes operatorios (teoremas en acto y conceptos en acto) diferentes.

Por ejemplo, en el Nivel Parcialmente Exponencial (figuras 3, 4 y 5) se muestra que mientras en el sistema de representación numérico (SRN) la resolución es no lineal, en el algebraico de primer orden (SRA1) es exponencial, y en el grafico (SRG) es lineal. Es decir, la organización de la conducta en situación, y los teoremas en acto que dirigen la acción (Tabla 5) en cada SR, son diferentes, y contradictorios entre sí (Esquema 2).

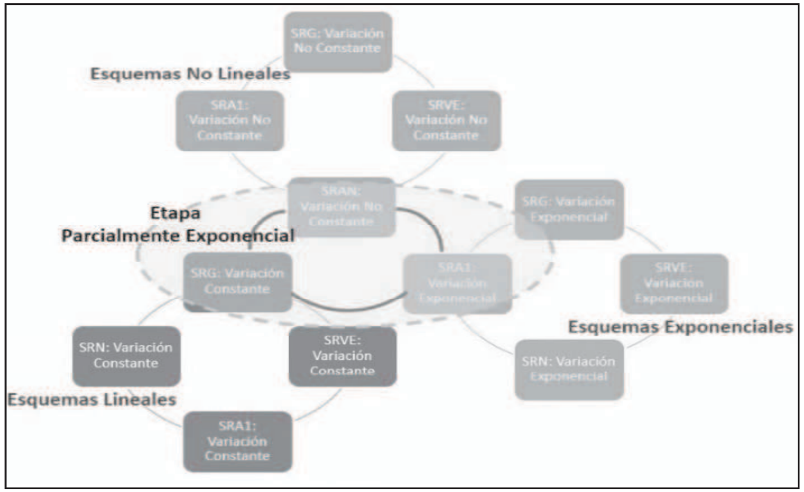
Tabla 5

SRN	"El aumento se calcula sobre la cantidad inmediata anterior"	[NL]
SRA1	"La fórmula es: $f(t) = k \cdot a^t$. Donde t es la variable independiente; a es la tasa de crecimiento y k la cantidad inicial"	[E]
SRG	"La representación gráfica es una curva recta creciente o decreciente"	[L]

Descripción de invariantes operatorios, Nivel Parcialmente Exponencial
Nota: NL= No Lineal; E= Exponencial; L= Lineal

Luego, cómo los invariantes operatorios responden a organizaciones diferentes, estos resultados permiten inferir que los esquemas que dirigen la acción en cada sistema de representación, son diferentes. Es decir, la conceptualización no es la construcción del "esquema exponencial", sino más bien de un complejo conjunto de esquemas exponenciales cuya relación

puede ser lábil o fuerte, según las situaciones a las que sean expuestos los estudiantes.



Esquema 2: Selección de esquemas en cada sistema de representación

Así, el análisis muestra que los esquemas que dirigen la acción en cada sistema de representación son diferentes, hasta pueden ser contradictorios entre sí, para el mismo concepto. Los alumnos no son conscientes de esto. Esto muestra que muchos de los invariantes que guían la acción en situación, permanecen en la esfera de lo implícito. La explicitación y formalización de estos invariantes operatorios en cada SR es un paso necesario, cuando se está interesado en la enseñanza de conceptos. Pues no es posible discutir el significado de conceptos implícitos. Esto llama a estrechar la relación entre la forma operatoria y predicativa del conocimiento.

En el siguiente apartado se analiza cómo evoluciona la conceptualización de las funciones exponenciales.

Desarrollo de los Niveles en la Conceptualización de las Funciones Exponenciales

En la Tabla 6 se han clasificado las respuestas de todos los alumnos que participaron en la implementación, para cada situación según las etapas arriba descriptas.

En la primera columna se ubican las situaciones[2], y en la última, el total de alumnos de ambos cursos. En las columnas segunda a sexta, los niveles descriptos; y en la séptima la cantidad de alumnos de ambos cursos que faltó a la clase el día que se resolvió la respectiva situación.

Tabla 6

[S]	[L]	[PNL]	[NL]	[PE]	[E]	[A]	[T]
1	12	33	4	-	-	10	59
2	-	36	18	2	-	3	59
4	-	-	-	17	35	7	59
5	-	-	-	-	54	5	59
7	-	-	-	41	13	5	59

Desarrollo de la conceptualización

La clasificación de las respuestas sugiere la existencia de una progresividad en la conceptualización de la función exponencial vinculada a los SR, que va desde los esquemas lineales, hasta los exponenciales (situaciones uno a cinco).

El hecho de que la respuesta totalmente exponencial [E] aparezca por primera vez en la situación cuatro, y que en la situación siete, que refiere a un problema que requería de funciones exponenciales de la forma $f(x) = k.a^x + b$, la cantidad de respuestas parcialmente exponenciales [PE] sea de 41 sobre 54, evidencia las dificultades que presenta la estabilización de este nivel, pues cuando los alumnos en un determinado SR dudaban de la respuesta, en ese SR retomaban estrategias no exponenciales. Esto resalta la complejidad del proceso de conceptualización de variaciones no lineales en general, y de la función exponencial en particular, en la escuela secundaria y muestra también que los sistemas de representación no evolucionan juntos, y lejos de ser transparentes, tienen sus propias complejidades.

[2] Las situaciones tres, seis, y nueve no están porque en ellas se acuerdan la definición de interés compuesto y función exponencial y se realizan únicamente en el SR algebraico de segundo orden. La situación ocho refiere al estudio de las asíntotas, y la situación diez a las ecuaciones exponenciales. En la once se analiza, con el uso de software, la variación de esta familia de funciones, y en la doce se hace una síntesis personal. Todas estas situaciones merecen un estudio particular.

Conclusiones

El análisis evidencia el carácter progresivo de la conceptualización de la función exponencial, vinculada a los sistemas de representación. Esto se pone de manifiesto en los cinco tipos de respuesta identificados. Sin embargo, esta progresividad no ocurre en todos los sistemas de representación de manera simultánea.

Se observa que si bien los alumnos pueden resolver un problema utilizando un sistema de representación, no logran hacerlo con otro sistema de representación, aun dentro de la misma situación. Es decir, que los resultados obtenidos en un SR, no son necesariamente reinterpretados en otro, al menos cuando el conocimiento del campo conceptual [CC] es incipiente. Esto podría deberse a que inicialmente, ellos utilizarían invariantes operatorios diferentes según el sistema de representación que demanda la situación.

Es decir, la conceptualización de la función exponencial requiere nuevos invariantes ligados a unas maneras diferentes de variación, y además, nuevos invariantes ligados a cómo enunciarlos. Por otro lado, cuando los únicos esquemas de variación funcional que el estudiante posee son lineales, y están largamente consolidados por el uso, los utiliza coherentemente en todos los sistemas de representación.

Finalmente, la conceptualización de la función exponencial, supone una actividad compleja que emerge en variadas y ricas situaciones, que no involucra en principio, ni simultáneamente a todos los sistemas de representación. La construcción y consolidación de esquemas ligados a la variación exponencial excede largamente el tiempo que duró esta implementación y posiblemente se extiende más allá de la etapa escolar.

Sin embargo, sería importante repensar la enseñanza de las funciones en general, y de las funciones exponenciales en particular, a la luz de estos resultados sustentados en la diferencia claramente expresada por la teoría de Vergnaud, entre simbolización y conceptualización. Lamentablemente, estos procesos son habitualmente homologados en la escuela, donde frecuentemente se reduce la conceptualización a la simbolización y a la forma predicativa, ignorando las formas operatorias precedentes.

CAPÍTULO 3
LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Viviana Carolina Llanos, María Rita Otero

Introducción

En este capítulo se utiliza la Teoría de los Campos Conceptuales de Gérard Vergnaud (1990, 1996, 2007, 2013) para describir la *conceptualización* de las funciones polinómicas de grado dos.

Para analizar bajo qué condiciones se produce la *conceptualización* de ciertos conceptos, es preciso identificar las situaciones epistemológicamente apropiadas, que interactúan con los *esquemas* necesarios para tratarlas. De la evolución de dichos esquemas, depende la construcción de los conceptos del campo correspondiente.

En virtud de la definición de concepto formulada por Vergnaud, ya mencionada en el capítulo uno, se diseñan las situaciones y se busca identificar los *invariantes operatorios* y los representantes simbólicos empleados para representar los conceptos.

Se diseñaron 10 situaciones, 3 instancias de ejercitación y actividades de síntesis. Las situaciones se plantearon en distintos marcos de resolución (Douady, 1984), orientadas a desarrollar los conceptos en distintos marcos. El uso de un conjunto de situaciones diseñadas en distintos marcos de resolución, obedece al objetivo de considerar los *invariantes operatorios* y *sistemas de representación* específicos de cada marco, puesto que la capacidad de resolver un problema en diferentes marcos, es consustancial a la actividad matemática y también a la conceptualización, regida por la variedad y la historia. Así, el cambio de marcos tiene un papel central, porque posibilita analizar la evolución de los conceptos, cuando se propone la en apariencia, "misma situación" en otro marco de resolución.

La investigación se desarrolló en una escuela pública de gestión privada de la ciudad de Tandil, durante tres años consecutivos, en dos cursos paralelos en cada año. Es decir, son 6 implementaciones de las que participaron (N=163) estudiantes entre 14 y 16 años. Durante las clases, se obtuvieron todas las producciones escritas de los alumnos en cada situación, se realizó un registro de audio de cada clase, y se tomaron notas de campo. Los protocolos correspondientes a las producciones escritas de los estudiantes muestran los resultados que obtienen al interactuar con la situación, así como las marchas y contramarchas que realizan.

Mediante un proceso de categorización, análisis y meta-análisis se describen, construyen e identifican diferentes niveles de *conceptualización* en cada marco y a lo largo del desarrollo de la secuencia, relativos al campo conceptual de las funciones polinómicas de grado dos.

Este trabajo se ocupa de los conceptos. A continuación se retoma la definición de *concepto* de Vergnaud, y se desarrolla la estructura epistemológica de las *situaciones*, los *invariantes operatorios* y los *sistemas de representación* propios de la investigación y específicos de cada marco.

Concepto

Como se ha definido en el capítulo 1, un *concepto* (Vergnaud, 2013) se define como un triplete de tres conjuntos, no independientes entre sí: el conjunto de las *situaciones* que le dan sentido al concepto (S), el conjunto de los *invariantes operatorios* (I) que integran los esquemas, evocados en las situaciones y el conjunto de los *sistemas de representación* (L) que permiten representar los conceptos y sus relaciones.

Las situaciones

Se proponen 10 situaciones, diseñadas en distintos marcos de resolución. Las situaciones 1,2 y 3 integran los marcos geométrico, gráfico y funcional para reconstruir las características de la representación gráfica de las funciones polinómicas de grado dos. El recorrido generado por la multiplicación geométrica de dos rectas permite construir una representación gráfica de la parábola, justificando cada punto notable, y también analizando las diferencias entre las distintas representaciones que se obtienen. Un aspecto destacable es la posibilidad de construir el vértice de la parábola y justificar la simetría de la curva. El retorno a la geometría hace posibles dichas pruebas.

La construcción geométrica del vértice no sólo resulta imprescindible por la relevancia que dicho punto notable adquiere en la representación de una parábola, sino también, por la generalidad y la generatividad que

dicha construcción contiene. Esta técnica permite multiplicar o dividir cualquier segmento de cualquier representación gráfica, lo que da lugar a la multiplicación y división "geométrica" entre cualquier curva.

En particular, si son más de dos rectas se puede ingresar al estudio de las funciones polinómicas, y para el caso del cociente, a las funciones racionales, siempre recuperando técnicas geométricas.

Se decide comenzar por la multiplicación de dos rectas recurriendo a lo que los estudiantes conocen de antemano, como las propiedades de la multiplicación, y las técnicas geométricas basadas en el teorema de Tales y la semejanza de triángulos, para construir nuevos resultados que podrán ser validados en otro marco.

Las situaciones 4 a 8, integran los marcos analítico, gráfico y funcional. Se continúa con la multiplicación de dos rectas, pero ahora, en otro marco. Con estas situaciones, es posible reconstruir representaciones analíticas equivalentes de las funciones polinómicas de grado dos, lo que da lugar desde el inicio a la forma factorizada de dicha función y como consecuencia a la forma polinómica. También es posible reconstruir la idea de que infinitos pares de rectas pueden generar una misma representación gráfica de dicha función; y por otro, la idea de que toda parábola provendría de la multiplicación de rectas (desestimada más adelante). El cambio de marcos que se introduce a partir de la situación 4, permite a los estudiantes reinterpretar los conceptos desarrollados en las situaciones anteriores, y reconstruir otros.

Con las situaciones 9 y 10 se estudia el problema de las funciones que no tienen ceros reales, cuya respuesta puede obtenerse como consecuencia de reingresar al marco geométrico. Se discute la conjetura de que todas las parábolas provienen de la multiplicación de rectas, que es falsa. Se introduce la idea de que dada una parábola, es posible analizar otras congruentes, realizando movimientos en el plano. Las discusiones que se pueden generar a partir de esta cuestión, permitirán no sólo justificar el *sentido* de las rectas como constitutivas del *campo conceptual* de las funciones polinómicas de grado dos, sino también analizar la importancia que las rectas tienen con relación a los ceros y a las diversas representaciones analíticas de estas curvas.

Se analizan en este capítulo los conceptos desarrollados por los estudiantes en las situaciones 1 a 3 en los marcos geométrico, gráfico y funcional; y la evocación y reestructuración de los mismos cuando se produce el cambio al marco analítico a partir de la situación 4.

Invariantes operatorios

Los invariantes operatorios (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto) que se identifican, son una reconstrucción del investigador a partir del análisis de los protocolos escritos de los estudiantes. Estos invariantes implícitos permiten al sujeto actuar en situación, y algunas de esas relaciones pueden ser enunciadas. Es sobre estas últimas que se realiza dicha reconstrucción.

Sistemas de Representación

Los *sistemas de representación* que se identifican son:

SRG1 (geométrico de orden 1): refiere a las construcciones geométricas realizadas en lápiz y papel, principalmente para justificar los conceptos de simetría y vértice en el marco.

SRG2 (geométrico de orden 2): refiere a la simbología en letras para justificar las construcciones geométricas realizadas en el SRG1.

SRF (funcional): refiere a la notación funcional y a los cálculos que realizan los estudiantes a partir de la multiplicación entre las curvas, como por ejemplo $h(x) = f(x) . g(x)$, $f(2)$, $f>0$ y $g<0$ entonces $h<0$.

SRGr (gráfico): refiere a las representaciones en el sistema de ejes cartesianos de puntos, rectas, curvas y todos resultados que se obtienen gráficamente.

SRA (analítico): refiere a la representación algebraica de lo geométrico. Se trata de un nivel *pre algebraico* (Gascón, 1999) donde los parámetros se corresponden con las funciones de la situación y están fijos.

SRVd (verbal denotativo): refiere a las enunciaciones verbales escritas de los estudiantes, con el objetivo de indicar una característica, un resultado.

SRVa (verbal argumentativo): refiere a las enunciaciones verbales escritas de los estudiantes que realizan argumentaciones discursivas, justificando o reafirmando lo construido.

Identificar los distintos SR es esencial en el análisis de la conceptualización. Las situaciones diseñadas requieren de la utilización de

varios SR en simultáneo y según el marco. Los sistemas **SRG1** (geométrico de orden 1), **SRG2** (geométrico de orden 2) son específicos del marco geométrico, mientras que el **SRA** (analítico) es propio del marco analítico. Los sistemas **SRF** (funcional) y **SRGr** (gráfico) se identifican en todas las situaciones porque las mismas se diseñaron en al menos dos marcos: funcional y gráfico.

Niveles de conceptualización

Para describir los niveles de *conceptualización* de las funciones polinómicas de grado dos, se analizan los componentes de los conceptos: las *situaciones*, los *invariantes operatorios* (*conceptos-en-acto* y *teoremas-en-acto*), y los *sistemas de representación* (SR) utilizados por los alumnos en situación. Se decide ubicar a los estudiantes en el nivel más alto que alcanzan durante la secuencia, teniendo en cuenta que en ningún caso se evidencia un retroceso en los resultados obtenidos, entre una situación y la siguiente en cada marco.

La multiplicación de las rectas en los marcos geométrico, gráfico y funcional.

Las situaciones 1 a 3 introducen el problema de construir una gráfica para las funciones polinómicas de grado dos, como resultado de multiplicar rectas cuando sólo se dispone de la representación gráfica de las rectas (sin coordenadas) y de la unidad en los ejes.

Para graficar cada parábola, es necesario identificar los puntos notables, probar la simetría de la curva y construir el vértice, utilizando el único recurso disponible: la geometría. Para probar la simetría de la curva es necesario construir triángulos a igual distancia de los ceros, utilizando los segmentos determinados por las rectas en esos puntos, probar que son semejantes y por el Teorema de Tales plantear la proporción entre los segmentos determinados por esos triángulos. Esta prueba permite representar el eje de simetría y los puntos simétricos. La construcción del vértice requiere también de la construcción de triángulos semejantes, utilizando como información la unidad del eje de abscisas.

Se trata de una tarea compleja, que requiere recordar y construir varios conceptos y esquemas. Para un análisis detallado de cómo se realiza el cálculo geométrico puede consultarse el artículo de Llanos y Otero (2013). Las situaciones se proponen como sigue:

Las funciones f y g están dadas por los gráficos de las Figuras. Todas las rectas A//B//C//D, son perpendiculares al eje x. La función $h = f \cdot g$.

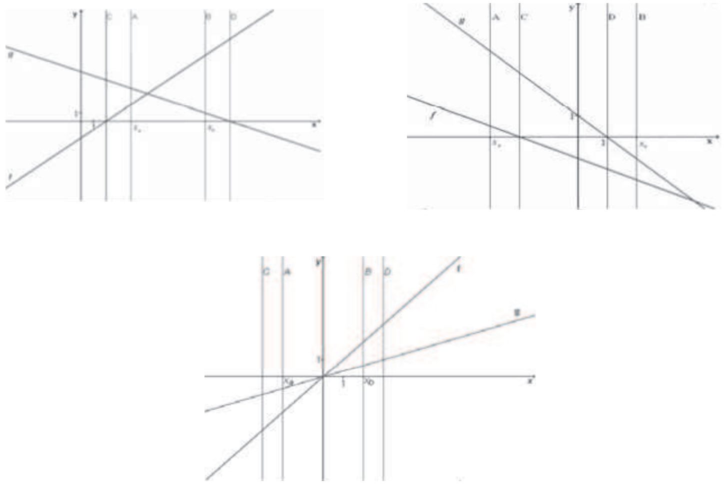


Figura 1*:* Gráficas correspondientes a las funciones *f y g*

(a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para h? ¿Qué características de la gráfica de h podrías justificar?

(b) Para todo x_a *y* x_b *equidistantes de los ceros de cada función,* $\overline{CA} = \overline{BD}$ *¿Es verdad que* $h(x_a) = h(x_b)$ *? ¿Podrías justificar?*

(c) ¿Qué triángulos tendrías que construir para calcular la multiplicación entre f y g en el eje de simetría, utilizando como lado de uno de los triángulos, la unidad?

Las principales diferencias en las respuestas de los alumnos a estas situaciones, residen en la utilización o no, de las técnicas geométricas. Los cuatro niveles identificados se distinguen en función de ellas y se describen a continuación:

- **Nivel Geométrico 0 (NG0):** se refiere a la imposibilidad de recuperar alguna técnica geométrica. Se obtiene una representación gráfica basada únicamente en los ceros, "unos" y el análisis de los signos.
- **Nivel Geométrico 1 (NG1):** se refiere a quienes además de desarrollar los conceptos del nivel anterior, intentan probar la simetría de la curva, pero no lo logran plenamente. Deben utilizarse en este nivel las técnicas geométricas que permiten construir triángulos semejantes para probar la simetría.
- **Nivel Geométrico 2 (NG2):** corresponde a los estudiantes que prueban la simetría y que también construyen el vértice de la parábola, utilizando la geometría. Obtienen una gráfica bien aproximada para *h*.
- **Nivel Geométrico 3 (NG3):** se caracteriza por utilizar en general los resultados obtenidos mediante las técnicas geométricas. No puede faltar: por un lado, la prueba de la simetría en otros puntos equidistantes de los ceros, para concluir que en cualquier caso por construcción la parábola es simétrica; y por otro, generalizar el uso de la técnica para calcular el vértice a la construcción de cualquier punto de la curva, multiplicando segmentos en cualquier abscisa.

Los niveles son progresivos. La distribución de los estudiantes por cada nivel, se sintetiza en el gráfico 1:

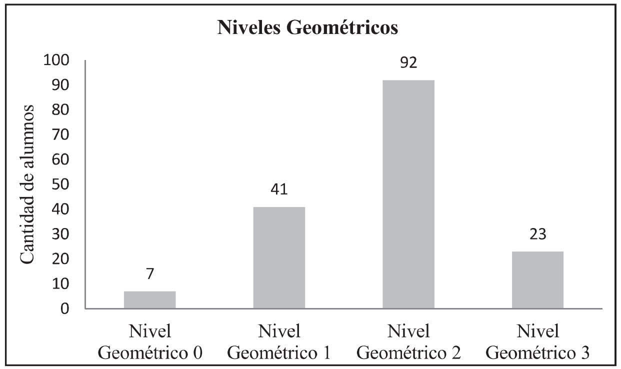


Gráfico 1: Distribución de los estudiantes en los distintos niveles en los marcos geométrico, gráfico y funcional

Cada nivel se ejemplifica describiendo un ejemplo prototípico y se analizan los *invariantes operatorios* y los *sistemas de representación* que describen al nivel.

Nivel Geométrico 0 (NG0)

Los estudiantes de este nivel construyen una gráfica aproximada de *h*, a partir del análisis de lo que ellos denominan ceros, unos, menos uno[3], y en algunos casos, el punto de intersección entre las rectas.

Se seleccionó al protocolo del estudiante A28 (Figura 2) como un ejemplar prototípico del NG0. Estos puntos se construyen por inferencias del estudiante, como por ejemplo: $h=0\cdot g=0$, $h=f\cdot 0=0$ y análogamente con los unos y menos unos que representa en la gráfica.

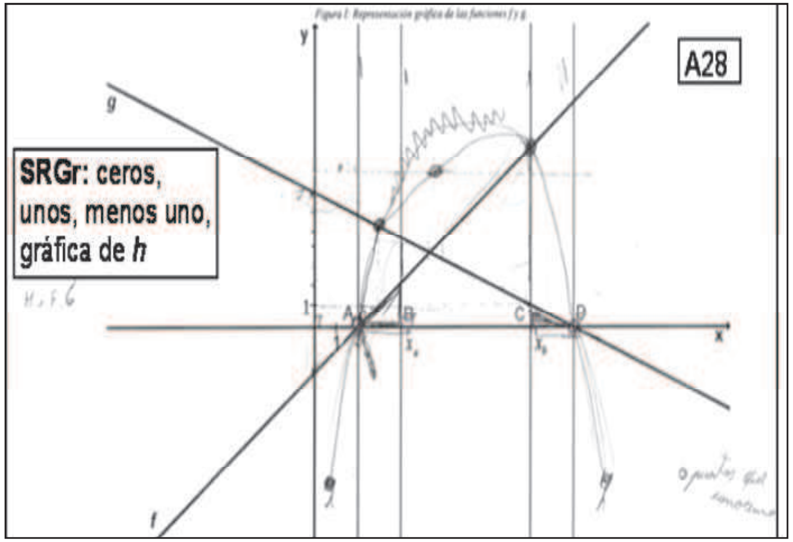


Figura 2: Protocolo correspondiente al alumno A28.

[3] Se indican los “ceros”, “unos”, “menos unos” y “múltiplos de la unidad”; pues así se estableció nombrarlos con los estudiantes. Las técnicas matemáticas que permiten justificar estos puntos, también se han desarrollados en el trabajo de Llanos y Otero (2013).

En la Tabla 1 se sintetizan los *invariantes operatorios*, *inferencias* y *sistemas de representación* propios del nivel. Las filas incompletas evidencian los conceptos que no han sido adquiridos, y a la vez muestran las diferencias entre los distintos niveles. Este comentario vale para los demás.

Tabla 1

Conceptos-en-acto	Teoremas-en-acto	Sistema de representación
Ceros	*Los ceros de las rectas coinciden con los de h.*	SRGr (gráfico)
Unos	*Donde las rectas f=1 y g=1, h pasa por la otra recta en el punto respectivamente.*	SRGr (gráfico)
Múltiplos de la unidad	*Cuando f=-1 y g=-1 entonces h=-g y h=-f respectivamente.*	SRGr (gráfico)
Signos	*h admite intervalos positivos y negativos*	SRGr (gráfico)
Simetría		
Vértice		
Construcción geométrica de cualquier punto de *h*.		
Parábola	*La representación gráfica de h pasa por todos los puntos construidos.*	SRGr (gráfico)

Análisis de invariantes operatorios y SR en el NG0.

Los estudiantes de este nivel se basan sólo en la identificación de algunos puntos sobre la curva en el SRGr (gráfico).

Nivel Geométrico 1 (NG1)

En este nivel se obtiene una gráfica más aproximada para h que en el nivel anterior. Además de los ceros, unos y menos uno, se usan algunas técnicas geométricas para probar la simetría de la curva, pero no alcanzan esta prueba completamente. La construcción de los triángulos, y las nociones de semejanza y proporción no pueden faltar en el nivel.

Un ejemplar prototípico del nivel G1 es A16 (Figura 3).

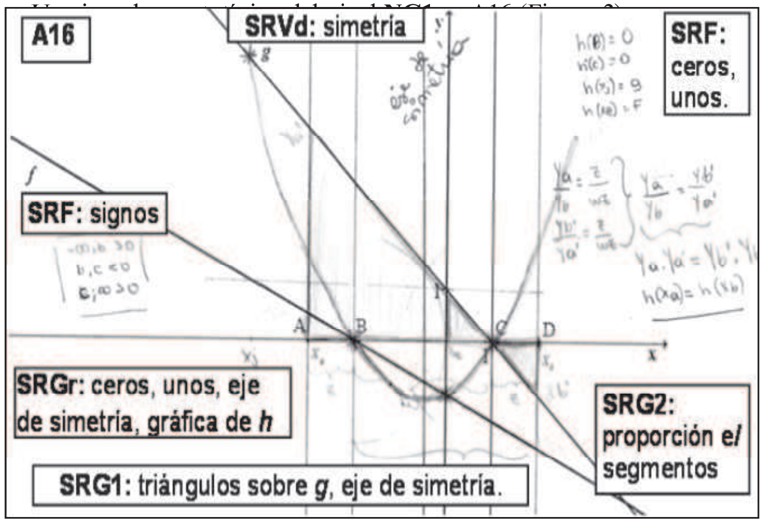


Figura 3: Protocolo correspondiente al alumno A16

El estudiante A16 construye una gráfica basada principalmente en el análisis de los signos, puntos notables y la prueba de la simetría. Sólo representa en la gráfica los triángulos sobre la recta g en puntos que equidistan de los ceros de h. Omite construir los triángulos que se forman con la recta f, y tampoco verifica si los que se forman con g son o no

semejantes. La proporción que plantea no se corresponde con los triángulos representados.

La prueba, parcialmente realizada, le permite representar el eje de simetría en el SR gráfico (SRGr), pero no los puntos simétricos.

En la Tabla 2 se resumen los componentes de la definición de *concepto* de Vergnaud, utilizados por los estudiantes del nivel G1. A diferencia del nivel anterior, estos estudiantes utilizan los SR geométricos SRG1 y SRG2 adecuados al marco para el que se diseñaron estas situaciones:

Tabla 2

Conceptos-en-acto	Teoremas-en-acto	Sistema de representación
Ceros	*Los ceros de las rectas coinciden con los de h.*	SRGr (gráfico)
	h (B) =0, h (C) =0	SRF (funcional)
Unos	*En x_j y x_e: f=1 y g=1, entonces h pasa por la otra recta en el punto.*	SRGr (gráfico)
	h (x_j) =g y h (x_e) =f	SRF (funcional)
Múltiplos de la unidad	*f=-1 y g=-1 entonces h=-g y h=-f respectivamente.*	SRGr (gráfico)
Signos	(-∞; b) y (c; +∞), h>0 (b; c), h<0	SRF (funcional)
Simetría: –Triángulos sobre g –Proporción entre segmentos –Eje de simetría	*Construcción de triángulos en puntos equidistantes de los ceros de las rectas.*	SRG1 (geométrico de orden 1)
	Proporción entre segmentos y prueba de la simetría.	SRG2 (geométrico de orden 2)
	Construcción del eje de simetría.	SRG1 (geométrico de orden 1)
Vértice		

Construcción geométrica de cualquier punto.		
Parábola	*La gráfica de h se obtiene por los puntos construidos.*	SRGr (gráfico)

Análisis de invariantes operatorios y SR en el NG1.

Nivel Geométrico 2 (NG2)

Éste nivel caracteriza a la mayoría de los estudiantes. Además de los resultados alcanzados en los niveles anteriores, aquí no puede faltar la prueba de la simetría de la curva y la construcción del vértice utilizando nociones geométricas. Los alumnos utilizan con precisión dichas construcciones, que son cruciales para el desarrollo de los conceptos vinculados a la representación gráfica de la parábola, en los marcos geométrico, gráfico y funcional.

Se selecciona como representante del nivel NG2 al estudiante A56 (Figura 3). Este como todos los estudiantes del nivel, prueba la simetría y construye el vértice en la mediatriz del segmento que une los ceros. Para probar que la curva es simétrica, construye los triángulos en los puntos equidistantes de los ceros, justifica que dichos triángulos son semejantes, plantea la proporción entre los lados y justifica por qué la curva es simétrica. En el SRGr (gráfico) marca el eje de simetría, los puntos simétricos y obtiene el vértice (construyendo triángulos semejantes sobre el eje de simetría y utilizando como información la unidad sobre el eje *x*).

La utilización de los SR geométricos SRG1 y SRG2 evidencia la relevancia del marco geométrico en la construcción y justificación de la curva de la función polinómica de grado dos. Sin este marco, la simetría y el vértice no pueden justificarse con los conocimientos escolares disponibles.

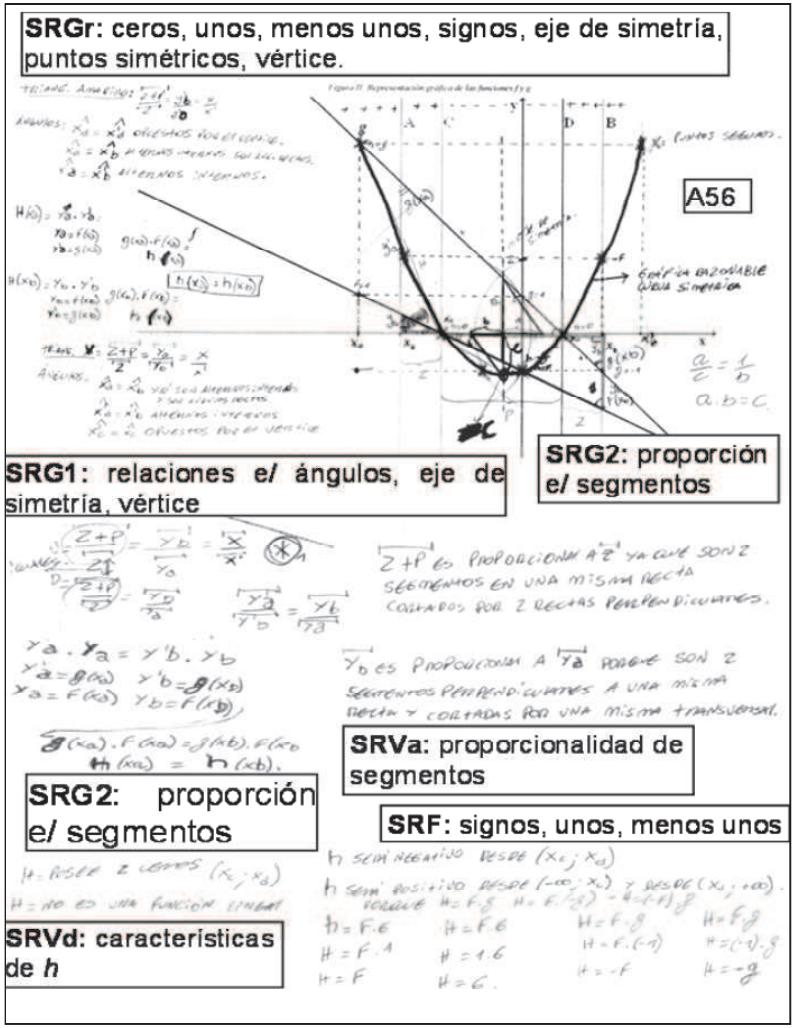


Figura 3: Protocolo correspondiente al alumno A56

Los componentes de la definición de *concepto* identificados se sintetizan en la Tabla3:

Tabla 3

Conceptos-en-acto	Teoremas-en-acto	Sistema de representación
Ceros	*Los ceros de las rectas coinciden con los de h.*	SRGr (gráfico)
	h tiene dos ceros en x_c *y* x_d	SRVd (verbal denotativo)
	$h(x_c) = 0 \cdot g(x_c)$, $h(x_d) = f(x_d) \cdot 0$	SRF (funcional)
Unos	*f=1 y g=1 respectivamente, entonces h pasa por la otra recta en el punto.*	SRGr (gráfico)
	$h = 1 \cdot g = g$, $h = f \cdot 1 = f$	SRF (funcional)
Múltiplos de la unidad	*f=-1 y g=-1 entonces h=-g y h=-f respectivamente.*	SRGr (gráfico)
	$h = -1 \cdot g = -g$, $h = f \cdot (-1) = -f$	SRF (funcional)
Signos	$(-\infty; x_b)$ y $(x_c; +\infty)$, $h>0$ $(x_b; x_c)$, $h<0$	SRF (funcional)
	Intervalos donde h es positiva y negativa.	SRGr (grafico)
Simetría: –Triángulos –Semejanza de triángulos –Teorema de Tales –Proporción entre segmentos –Eje de simetría –Puntos simétricos	*Construcción de triángulos semejantes. Relaciones entre ángulos de los triángulos. Construcción del eje de simetría.*	SRG1 (geométrico de orden 1)
	Proporción entre los segmentos. Prueba de la simetría.	SRG2 (geométrico de orden 2)
	Los lados de los triángulos semejantes son proporcionales.	SRVa (verbal argumentativo)
Vértice: –Triángulos –Teorema de Tales –Construcción de segmentos	*Construcción de triángulos en el eje de simetría. Construcción del vértice.*	SRG1 (geométrico de orden 1)
	Proporción entre los lados de los triángulos.	SRG2 (geométrico de orden 2)
	Construcción del vértice. Representación de los puntos simétricos.	SRGr (grafico)
Construcción geométrica de cualquier punto.		
Parábola	*La gráfica pasa por los puntos obtenidos.*	SRGr (grafico)
	h tiene más de un cero, es una curva.	SRVd (verbal denotativo)

Análisis de invariantes operatorios y SR en el NG2.

Nivel Geométrico 3 (NG3)

Se logra generalizar las técnicas de cálculo geométrico desarrolladas para la prueba de la simetría y la construcción del vértice. A diferencia de los estudiantes del **NG2**, se verifica que la prueba de la simetría se cumple para otros puntos a igual distancia de los ceros, y se generaliza para todos los casos. La técnica para construir el vértice, permite construir cualquier punto de la curva, en cualquier abscisa, a partir de la multiplicación geométrica de los segmentos de las rectas en esos puntos. Se selecciona el protocolo correspondiente a A129 (Figura 4) como representativo del nivel.

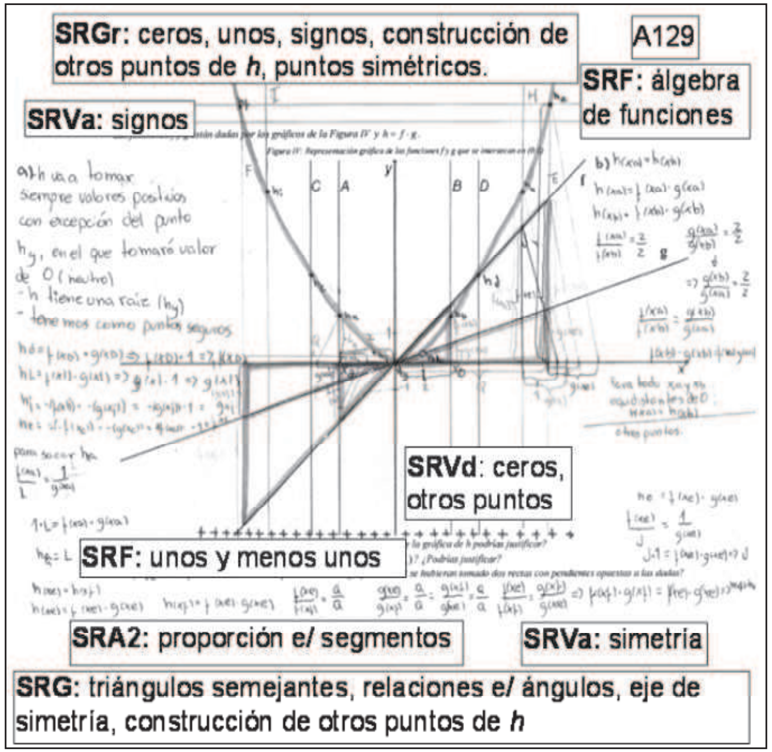


Figura 4: Protocolo correspondiente al alumno A129.

A129 construye una gran cantidad de puntos generalizando la técnica del cálculo geométrico usada para obtener el vértice de *h*. Además indica signos, ceros, unos, los múltiplos de la unidad, prueba la simetría, justifica que *h* es simétrica y representa gráficamente estos puntos. La representación gráfica que obtiene de *h* es muy aproximada.

Los *invariantes* y los SR utilizados en el nivel NG3 se sintetizan en la Tabla 4. Se destaca la importancia de las técnicas geométricas para validar el conocimiento matemático, como ocurre para la simetría, y también el desarrollo de la técnica del vértice para multiplicar y dividir cualquier par de segmentos; lo que permite estudiar las funciones polinómicas y racionales.

Tabla 4

Conceptos-en-acto	Teoremas-en-acto	Sistema de representación
Ceros	*Los ceros de las rectas coinciden con los de h.*	SRGr (gráfico)
	$h(x_c) = 0 \cdot g(x_c)$ y $h(x_d) = f(x_d) \cdot 0$	SRF (funcional)
Unos	*En f=1 y g=1, h pasa por la otra recta en el punto.*	SRGr (gráfico)
	$h=1 \cdot g = g$, $h = f \cdot 1 = f$	SRF (funcional)
Múltiplos de la unidad	*En f=-1 y g=-1, h=-g y h=-f.*	SRGr (gráfico)
	$h = -1 \cdot g = -g$, $h = f \cdot (-1) = -f$	SRF (funcional)
	Otros puntos. Ej. "dos". En el punto f=2; h= 2·g	SRF (funcional)
Signos	*Intervalos donde la función es positiva y negativa*	SRF (funcional)
	Representación donde h es positiva y negativa.	SRGr (grafico)
	Los signos de h dependen de los signos de f y g en cada intervalo.	SRVa (verbal argumentativo)

Simetría: –Triángulos –Semejanza de triángulos –Teorema de Tales –Proporción entre segmentos –Eje de simetría –Puntos simétricos –Generalización para cualquier punto de *h*	*Construcción de triángulos semejantes.* *Relaciones entre ángulos de los triángulos.* *Eje de simetría.*	SRG1 (geométrico de orden 1)
	Proporción entre los lados de los triángulos. *Prueba de la simetría.*	SRG2 (geométrico de orden 2)
	Los lados de los triángulos semejantes son proporcionales.	SRVa (verbal argumentativo)
	Para todo x_a *y* x_b, *equidistantes de los ceros de h,* $h(x_a) = h(x_b)$	SRVa (verbal argumentativo)
Vértice: –Triángulos –Teorema de Tales –Construcción de segmentos	*Construcción de triángulos en el eje de simetría.*	SRG1 (geométrico de orden 1)
	Proporción entre los lados de los triángulos.	SRG2 (geométrico de orden 2)
	Construcción del vértice. *Representación de los puntos simétricos.*	SRGr (grafico)
Construcción geométrica de cualquier punto de *h*.	*Construcción de triángulos semejantes en cualquier abscisa.*	SRG1 (geométrico de orden 1)
	Proporción entre los lados de los triángulos.	SRG2 (geométrico de orden 2)
	Construcción de cualquier punto de h	SRGr (grafico)
Parábola	*La gráfica de h pasa por los puntos construidos.*	SRGr (grafico)
	La multiplicación de rectas es una curva, porque tiene más de un cero.	SRVd (verbal denotativo)

Análisis de invariantes operatorios y SR en el NG3

Los distintos niveles identificados se diferencian principalmente por el dominio progresivo de las técnicas geométricas.

Puede decirse que los estudiantes de los niveles NG2 y NG3 son más competentes que los de los niveles anteriores, y esta afirmación se sostiene en la variedad de invariantes utilizados en la acción, y la diversidad de esquemas y conceptos que son capaces de evocar, construir y representar en distintos sistemas. Los estudiantes ubicados en los niveles NG0 y NG1 desarrollan esencialmente conceptos en los marcos gráfico y funcional. Es destacable la importancia del marco funcional en todos los niveles. Pero la conceptualización de la función polinómica de grado dos requiere de otros esquemas relativos al marco analítico y a sus formas de representar los conceptos. La situación 4, en apariencia igual a las anteriores, cambia el marco de resolución y produce un avance en la *conceptualización.*

La multiplicación de las rectas en los marcos analítico, gráfico y funcional.

El cambio a los marcos analítico, gráfico y funcional para multiplicar ahora analíticamente dos rectas promueve la conceptualización en otro marco.

El cambio al marco analítico[4] ocurre en la situación 4 y permite desarrollar esquemas y conceptos relativos a la representación analítica de las funciones polinómicas de grado dos, que en las situaciones anteriores no es posible obtener. Interesa analizar si existe una continuidad en ciertos conceptos desarrollados desde la primera situación, que pueden ser reconsiderados en otro marco.

Para describir los resultados en el marco analítico, se toma como ejemplo la situación 4, que es la siguiente:

Las gráficas de las funciones f y g se cortan en (3; 2). *La función f interseca al eje x en* (-1; 0) *y g en* (5; 0). *Sea h=f·g.*

[4] El marco analítico incluye lo geométrico; la denominada geometría analítica. Se decide directamente nombrarlo analítico y esta aclaración vale para todos los casos.

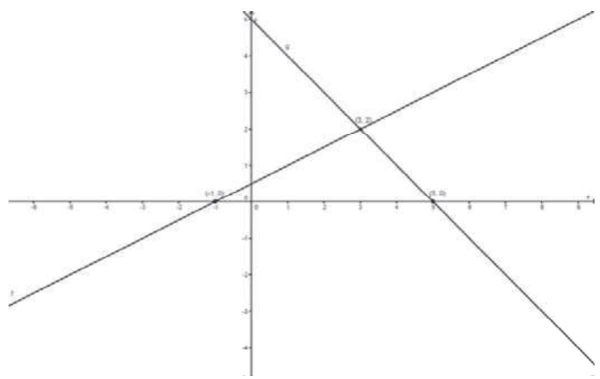


Figura 5: Representación gráfica de las funciones *f* y *g*.

a) Obtengan todas las fórmulas posibles para h.

b) Obtengan todas las representaciones cartesianas de h.

c) ¿Cuál es el valor de h para la abscisa de la mediatriz?

d) Si x_a y x_b son dos abscisas cualesquiera ubicadas a igual distancia respecto de cada cero de h (una a la derecha y otra a la izquierda), es $h(x_a) = h(x_b)$ como hemos demostrado en las situaciones anteriores. Verifiquen con la fórmula que han obtenido para h, al menos 3 casos y representen los valores gráficamente.

e) $f(3) = g(3) = 2$ *¿Cuál es el valor de h(3)?* ¿Cuál es su simétrico? Justificar.

Las respuestas se agruparon en dos niveles, que aquí se remiten a la situación 4.

En los niveles, la diferencia corresponde a una cuestión de competencia en el sentido de Vergnaud (2013). Es decir, los estudiantes resultan muy competentes en el marco analítico y sólo algunos consiguen conservar ambas formas de realizar las operaciones.

Los niveles analíticos identificados son:

- **Nivel Analítico 1 (NA1):** se caracteriza por obtener representaciones equivalentes para *h*, como resultado de multiplicar analíticamente dos rectas, por ejemplo, las formas factorizada y polinómica de las funciones polinómicas de segundo grado. No puede faltar en este nivel la formulación de dichas representaciones y la gráfica como resultado de calcular las coordenadas de los puntos notables de la parábola, en cualquier abscisa. Ejemplo: f (2) =5.

- **Nivel Analítico 2 (NA2):** es el nivel de los alumnos que recuperan los esquemas y conceptos desarrollados en el marco geométrico, ahora en el marco analítico. Además de las representaciones analíticas equivalentes y la obtención de cualquier ordenada a partir de las mismas; reutilizan las técnicas geométricas en otro marco, en particular la construcción del vértice utilizando triángulos semejantes y la generalización para representar cualquier punto que se quiera construir.

La interacción entre los conceptos de los marcos geométrico y analítico alcanzados por los alumnos del NA2, versus los estudiantes que no recuperan explícitamente los esquemas y conceptos de la geometría sintética de los niveles anteriores, es lo que determina la diferencia. La distribución de los alumnos en cada nivel, se sintetiza en el gráfico 2.

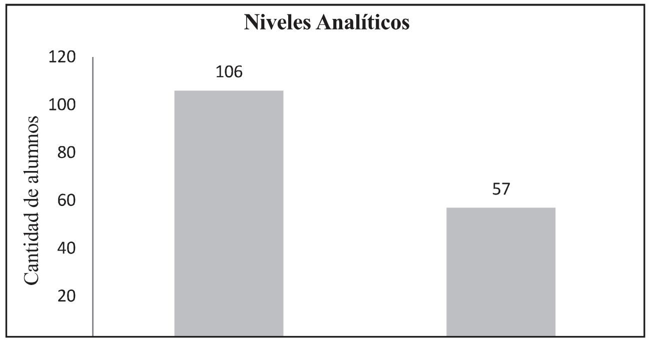


Gráfico 2: Distribución de los estudiantes por los niveles, en los marcos analítico, gráfico y funcional.

En el marco analítico, los estudiantes resuelven con mucha competencia en el SRA (analítico) en ambos niveles. Desde la primera situación en el marco (situación 4) los alumnos alcanzan el primer nivel, y algunos además recuperan conceptos y esquemas del marco geométrico para justificar los resultados que se obtienen en el marco analítico, los del NA2.

Si bien en cualquiera de los dos niveles se advierte una continuidad en ciertos conceptos ya reutilizados o construidos en las situaciones iniciales, ahora en el nuevo marco; se identifican diferencias entre las respuestas dadas por los alumnos a las situaciones en el marco analítico. Se describen las diferencias entre los niveles identificados en el marco analítico, comenzando por el NA1.

Nivel Analítico 1 (NA1)

En este nivel, construyen conceptos y esquemas relativos a las expresiones analíticas de la función polinómica de segundo grado; y la reinterpretación de la gráfica, en otro marco. No puede faltar el cálculo de las coordenadas de cualquier punto que quieran obtener para graficar *h*, además de los ceros, unos y los signos que los estudiantes recuperan de lo estudiado antes.

Se selecciona a A116 (Figura 6) como un prototipo del nivel NA1. Este protocolo ejemplifica la “desaparición” de las técnicas geométricas a las que se ha hecho referencia, y muestra el dominio de los conceptos y esquemas en el marco analítico, principalmente de los conceptos: función polinómica de segundo grado, representación analítica y gráfica de dicha función, puntos notables.

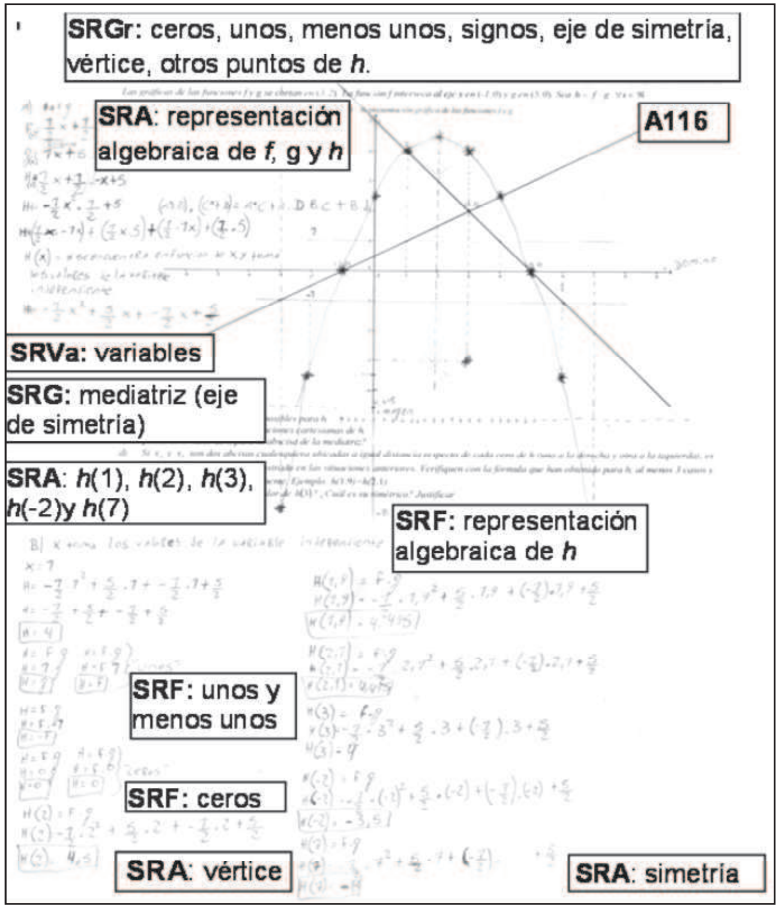


Figura 6: Protocolo correspondiente al alumno A116

A partir de la representación analítica de *h*, A116 analiza *h* (1) y verifica que coincide con el punto de la gráfica. Para verificar que la curva es simétrica, considera abscisas que se encuentran a igual distancia de los ceros, en particular para los puntos: *h* (1,9) = *h* (2,1) y *h* (1) =*h* (3), en el sistema de representación analítico funcional (SRA). El eje de simetría en la gráfica corresponde a la mediatriz del segmento que une los ceros; y obtiene las coordenadas del vértice a partir de la formula analítica de *h*.

En la tabla 5 se resumen los componentes de los conceptos en el marco analítico NA1.

Tabla 5

Conceptos-en-acto	Teoremas-en-acto	Sistema de representación
Representación analítica de *h*	*Las representaciones analíticas de las rectas determinan la de h=f·g. Cada gráfica tiene varias representaciones analíticas asociadas.*	SRA (analítico)
	h(x) se encuentra en función de x, y x toma los valores de la variable independiente.	SRVa (verbal argumentativo)
Gráfica de *h*		
Puntos notables Ceros Unos y múltiplos de la unidad. Construcción analítica de cualquier punto.	*Los ceros de las rectas coinciden con los de h.*	SRGr (gráfico)
	$h(x_c) = 0 \cdot g(x_c)$, $h(x_d) = f(x_d) \cdot 0$	SRF (funcional)
	En f=1 y g=1, h pasa por la otra recta en el punto.	SRGr (gráfico)
	$h = 1 \cdot g = g$, $h = f \cdot 1 = f$	SRF (funcional)
	$h = -1 \cdot g = -g$, $h = f \cdot (-1) = -f$	SRF (funcional)
	Construcción de cualquier punto a partir de la representación analítica Ej. $h(1) = 4$ *y* $h(-2) = -3{,}5$.	SRA (analítico)
Signos	Intervalos donde la función es positiva y negativa.	SRF (funcional)
	Representación de los signos de *h*.	SRGr (gráfico)
Simetría	$h(1{,}9) = h(2{,}1)$ y $h(1) = h(3)$	SRA (analítico)
	h (-1) =0 *y* h (5) =0. E*l eje de simetría se encuentra en el punto medio* $x_m = 2$	SRF (funcional)
	Construcción del eje de simetría	SRG1 (geométrico de orden 1)
Vértice	$h(2) = 4{,}5$	SRA (analítico)
Parábola	*h pasa por los puntos construidos*	SRGr (grafico)
	h tiene un máximo en el vértice $V = (2; 4{,}5)$	SRGr (gráfico)

Análisis de invariantes operatórios y SR para el nível NA1.

La simetría y el vértice, centrales en el marco geométrico, se obtienen analíticamente en este nivel, es decir, las propiedades geométricas se expresan analíticamente y sin recurrir a representaciones geométricas. Los demás conceptos vinculados a las características de la curva se recuperan y agregan otros puntos.

Nivel Analítico 2 (NA2)

Los estudiantes también reinterpretan los conceptos construidos en el marco geométrico, ahora en el analítico. Además de las representaciones analíticas equivalentes, utilizan explícitamente las técnicas geométricas desarrolladas es las situaciones 1 a 3, para graficar *h*, en particular la construcción del vértice construyendo triángulos semejantes y ggeneralizando dicha técnica para obtener cualquier punto que se quiera construir. Aun contando con los instrumentos para calcular analíticamente las coordenadas de cualquier punto, se reutilizan las técnicas desarrolladas en el marco geométrico, y se las verifica en el marco analítico, como ocurre con el vértice.

Se selecciona al estudiante A117 (Figura 7) como prototipo.

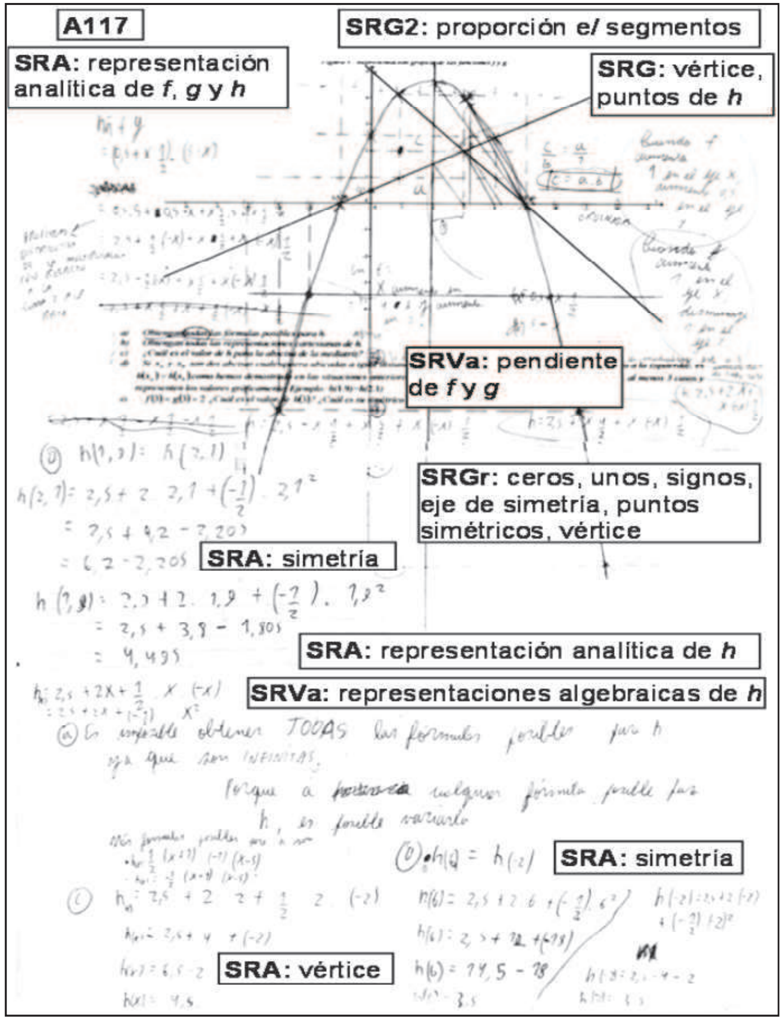


Figura 7: Protocolo correspondiente al alumno A117.

El protocolo muestra que este estudiante obtiene inicialmente representaciones analíticas equivalentes para *h* a partir de las representaciones de las rectas *f* y *g*. Verifica analíticamente que la curva es simétrica y calcula las coordenadas del punto para la abscisa de la mediatriz.

Para graficar *h* identifica los signos, ceros, unos y otros múltiplos de la unidad. Utiliza las técnicas de cálculo geométrico para construir el vértice de la curva y otros puntos. La mayor competencia de estos estudiantes, reside en su capacidad de disponer de más de una manera de hacer y de validar. El vértice es obtenido analíticamente se verifica geométricamente.

Los componentes de los conceptos en el marco analítico, para el nivel NA2, se sintetizan en la tabla 6.

Tabla 6

Conceptos-en-acto	Teoremas-en-acto	Sistema de representación
Representación analítica de *h*	*Las representaciones analíticas de las rectas determinan la de h=f·g. Es posible reconstruir distintas representaciones analíticas equivalentes para h.*	SRA (analítico)
	La multiplicación de las rectas se resuelve por las propiedades distributiva de la multiplicación. Es imposible obtener todas las fórmulas posibles para h, ya que son infinitas.	SRVa (verbal argumentativo)
Gráfica de *h*		

	Los ceros de las rectas coinciden con los de h.	SRGr (gráfico)
Puntos notables	$h\ (x_c) = 0 \cdot g\ (x_c)$, $h\ (x_d) = f(x_d) \cdot 0$	SRF (funcional)
Ceros	*En f=1 y g=1, h pasa por la otra recta en el punto.*	SRGr (gráfico)
Unos y múltiplos de la unidad	$h = 1 \cdot g = g$, $h = f \cdot 1 = f$	SRF (funcional)
	$h = -1 \cdot g = -g$, $h = f \cdot (-1) = -f$	SRF (funcional)
Construcción geométrica y analítica de cualquier punto de la curva	*Es posible construir analíticamente cualquier punto de h.*	SRA (analítico)
	Es posible construir triángulos semejantes en cualquier abscisa.	SRG1 (geométrico de primer orden)
	Proporción entre los lados de los triángulos.	SRG2 (geométrico de orden 2)
Signos	*Intervalos donde la función es positiva y negativa*	SRF (funcional)
	Representación de los signos de h	SRGr (grafico)
Simetría	*h* (1,9) =*h* (2,1) y *h* (6) = *h* (-2),	SRA (analítico)
	Eje de simetría en x=2. *Puntos simétricos.*	SRGr (grafico)
	El eje de simetría está en la mediatriz de los ceros.	SRG1 (geométrico de orden 1)

Vértice	*Construcción de triángulos semejantes en el eje.*	SRG1 (geométrico de orden 1)
	Los lados de los triángulos son proporcionales.	SRG2 (geométrico de orden 2)
	El eje de simetría está en x=2 , y h(2)=4,5.	SRA (analítico funcional)
	Representación en el punto V= (2; 4,5)	SRGr (gráfico)
Parábola	*h pasa por todos los puntos construidos*	SRGr (grafico)
	h tiene un máximo en el vértice V= (2; 4,5)	SRGr (gráfico)

Análisis de invariantes operatórios y SR *en el NA2.*

Los niveles identificados muestran las continuidades y rupturas en la conceptualización, cuando se cambia del marco geométrico al analítico.

Muchos conceptos que surgieron en el marco geométrico, vuelven a ser utilizados con el mismo sentido, aunque añadiendo el sistema de representación propio del marco analítico. Tal es el caso de los signos, ceros, unos, múltiplos de la unidad; simetría, vértice. Una característica de este nivel es el abandono de las técnicas de la geometría sintética a favor de las analíticas. La simetría de la curva y el vértice, se asumen, y a lo sumo se verifican sus propiedades analíticamente.

En el nivel NA2, además de lo anterior, se utiliza de manera explícita e independiente, la técnica de cálculo geométrico para construir el vértice y cualquier punto de la curva. Es decir, estos estudiantes disponen de maneras diferentes y complementarias de hacer, frente a la misma tarea, es decir, son más competentes.

Conclusiones

Se ha descripto y analizado el proceso de conceptualización de las funciones polinómicas de grado dos, en cada marco. Los niveles geométricos

(NG0, NG1, NG2 y NG3) difieren en el desarrollo, de las técnicas de cálculo geométrico. Estos niveles se diferencian principalmente por la construcción y justificación de los conceptos: simetría y vértice, que reposa en el dominio de las técnicas geométricas.

La situación 4 ejemplifica los niveles del marco analítico, gráfico y funcional NA1 y NA2. Estos se diferencian por la competencia.

El cambio de marco produce una evolución de los conceptos frente a una situación aparentemente idéntica. En el marco geométrico se ignoran las coordenadas de los puntos y no es posible calcular numéricamente. Los conceptos de signo, ceros, unos y los múltiplos de la unidad, se originan de una utilización apropiada de las propiedades de la multiplicación y del concepto de función. La simetría y el vértice, se obtienen desde el marco geométrico, gracias a las técnicas de cálculo basadas en la geometría sintética, la semejanza y sus propiedades, el Teorema de Tales y la proporción de segmentos. En los niveles más avanzados (NG2 y NG3) los estudiantes dominan dichos conceptos así como los propios del marco funcional, que surge desde el inicio.

Al pasar al marco analítico, se advierte que los *viejos* conceptos son utilizados con la notación y las técnicas del nuevo marco, además de la formulación de expresiones analíticas equivalentes de la función. Frente a la tarea de multiplicar las rectas, los alumnos obtienen primero y de manera natural, la expresión factorizada y luego, como consecuencia obvia, la polinómica.

Sólo los estudiantes del segundo nivel NA2, usan las técnicas desarrolladas en el marco geométrico para construir el vértice y cualquier punto, verificando estos resultados con las representaciones analíticas. El marco funcional, no parece verse afectado sino potenciado, por el cambio de marco.

En un reagrupamiento de los datos posterior, se construyeron tres grupos para reflejar en qué medida al ingresar al marco analítico, se manifiestan explícita e independientemente conceptos del marco geométrico. Se nombran: **Nivel Analítico**, **Nivel Analítico Geométrico 1** y **Nivel Analítico Geométrico 2.** Se reserva el adjetivo geométrico para aludir al dominio de la geometría sintética, aunque el marco analítico sea en realidad, analítico-geométrico.

En el Gráfico 3 se presenta la distribución de los estudiantes en cada nivel. El gráfico permite interpretar como se desagregan en cada grupo, los niveles alcanzados en el marco geométrico por la totalidad de los estudiantes.

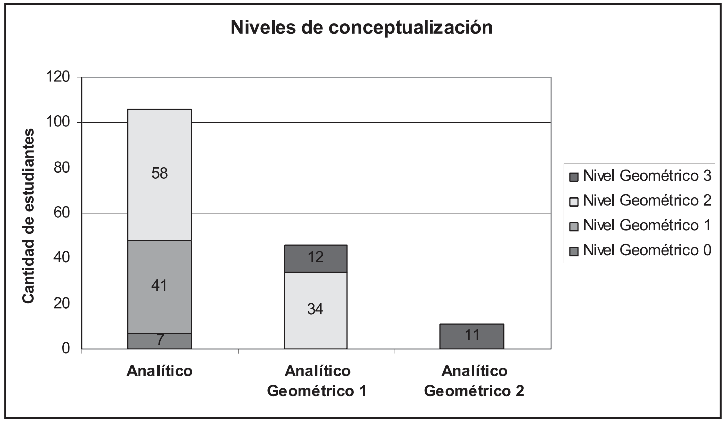


Gráfico 3: Desagregación por niveles

- **Nivel Analítico**: se ubican los alumnos que en el marco analítico abandonaron las técnicas geométricas. Se reinterpretan todos los conceptos, pero los de simetría y vértice sólo se enuncian analíticamente, así como las propiedades de la gráfica de las funciones polinómicas de segundo grado.
- **Nivel Analítico Geométrico 1:** los estudiantes que se ubican en este nivel, conservan y utilizan una variedad de conceptos del marco geométrico en el marco analítico. El cambio de marco les permite construir las representaciones analíticas equivalentes para la función y también, recuperar la construcción del vértice utilizando técnicas de geometría sintética. Los teoremas-en-acto que construyen combinan ambos marcos. La actividad eficiente en ambos marcos, se apoya en una variedad de invariantes y de esquemas. Entre los conceptos vinculados con la gráfica se utilizan no sólo signos, ceros y unos sino también el vértice y el eje de simetría geométricamente. Los puntos restantes y la constatación de la simetría se realizan analíticamente. Como estos

estudiantes ya habían probado geométricamente que la curva es simétrica, es razonable que en paso al marco analítico lo asuman y sólo verifiquen que la curva es simétrica analizando su comportamiento en puntos equidistantes de los ceros.

- **Nivel Analítico Geométrico 2:** corresponde a los estudiantes que evidencian un desarrollo conceptual superior, explícito y simultáneo en los distintos marcos. Además de construir y justificar todas las características de las gráficas y de las representaciones analíticas equivalentes de la función, es característica de este nivel la prueba de la simetría que se cumple para cualquier punto a igual distancia de los ceros (obtenida en el marco geométrico), la construcción del vértice y la generalización de esta técnica a cualquier punto de la curva. El nivel de abstracción y la formalidad que se observa en sus protocolos, también marcan una diferencia con los niveles antes definidos. Se destaca la integración entre los conceptos desarrollados en ambos marcos, la reinterpretación de los ceros y la forma factorizada de la función.

La diferencia entre los tres grupos de estudiantes es la competencia. Son más competentes los estudiantes que disponen de varias formas de realizar una misma tarea.

También se destaca la competencia de casi todos los estudiantes en el marco analítico respecto del geométrico. Esto obedece a varias razones.

Epistemológicamente hablando, la geometría analítica de Descartes es un hito en la historia del pensamiento y de la cultura humana. La eficiencia de las técnicas analíticas es incuestionables, y los estudiantes que abandonan las geométricas, lo hacen por la simplicidad de las primeras sobre las segundas. Asumen las propiedades geométricas y verifican analíticamente.

A esto se agrega que en la escuela secundaria, han desaparecido las razones de ser de la geometría sintética y que su enseñanza ha sido abandonada, con lo cual también desparecen las razones de ser de la geometría analítica. Esto justifica parcialmente la mayor cantidad de estudiantes competentes en el marco analítico respecto del geométrico, por razones de familiaridad.

Pero, sin la experiencia previa en el marco geométrico, suponemos que la riqueza de sus esquemas no sería la misma, aunque puedan adoptarse técnicas analíticas y propiedades de las funciones sin cuestionamiento

alguno, e incluso sin justificación ni sentido, como sabemos que es la regla en la escuela.

Insistimos en la importancia del marco geométrico para dar sentido al marco analítico y en la necesidad de plantear una continuidad y reciprocidad entre geometría sintética y geometría analítica, contrariamente a la dicotomía que se presenta en la cultura escolar, lo cual es un error didáctico basado en una errada concepción epistemológica e histórica.

Los resultados de este capítulo muestran una vez más el carácter progresivo y no lineal de la conceptualización. Hay continuidades y rupturas. Con el cambio de marco, los esquemas se adaptan y algunos conceptos se recuperan modificados en la dialéctica esquema-situación.

Las diferencias en la *conceptualización* identificadas en este capítulo, que atribuimos al cambio de marco, y las implicancias para el estudio de otras funciones, por ejemplo para las funciones polinómicas y racionales (Llanos y Otero; 2012,2013), valorizan el intento de introducir en la escuela secundaria situaciones en distintos marcos, en el campo conceptual aquí considerado.

CAPÍTULO 4
ASPECTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA PARA ENSEÑAR EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Marcelo Arlego

Introducción

En este Capítulo se introducen algunos conceptos básicos de mecánica cuántica. Los mismos son la base para el desarrollo de situaciones diseñadas para enseñar conceptos cuánticos en cursos de los últimos años de la escuela secundaria. El diseño de estas situaciones, su implementación y análisis de los resultados obtenidos en el marco de la TCC, son presentados en el Capítulo 5.

La mecánica cuántica, junto con la teoría de la relatividad, son las dos grandes revoluciones de la Física del primer cuarto del siglo veinte. Aunque esta última es probablemente más conocida, la mecánica cuántica ha tenido un impacto mucho mayor en el desarrollo tecnológico posterior. Sin embargo, después de casi un siglo, los conceptos de la mecánica cuántica desafían nuestro sentido común, basado en el mundo macroscópico, de escala humana. En particular, el paradigma onda-partícula ha estado en la base de las dificultades que supone la conceptualización de un sistema cuántico.

La cuestión central en el contexto de este capítulo, es cómo introducir las ideas básicas de un campo conceptual tan complejo como la física cuántica (no relativista) en la escuela secundaria. Usualmente, en los libros de texto se sigue una ruta histórica, se mencionan algunos experimentos clave y se finaliza con la relación de De Broglie, que el alumno utiliza sin entender. El resultado es completamente insatisfactorio para la comunidad de estudio.

Alternativamente, esta propuesta no sigue el desarrollo histórico, y se basa en los conceptos de la formulación de suma de todas las alternativas (STA) desarrollada por R. Feynman en 1949, haciendo uso de las ideas de P. Dirac. Dicha formulación es matemáticamente equivalente al formalismo canónico de operadores de la mecánica cuántica, desarrollado previamente por E. Schrödinger, W. Heisenberg y P. Dirac en 1925-1926.

Para nuestros propósitos, la ventaja principal del formalismo de STA es que permite analizar la transición entre el comportamiento clásico y cuántico a un nivel accesible a estudiantes de escuela secundaria. Además, dicha formulación muestra claramente la emergencia del comportamiento ondulatorio y corpuscular en un marco unificado y conceptualmente simple, mostrando ambos aspectos como complementarios, más que contradictorios.

En este capítulo exponemos las ideas principales del método, focalizando más en los aspectos conceptuales del mismo, que en el formalismo matemático. Cabe destacar que nuestro grupo viene investigando en este tema, desde el diseño, la implementación y análisis de resultados, desde hace varios años, como ejemplos representativos citamos: Fanaro, M; Otero, M; Arlego M. (2007, 2009, 2012); y Fanaro M., M. Arlego, Otero, M. R (2014).

Entre los autores que han elaborado propuestas de enseñanza de la mecánica cuántica basadas en el enfoque STA y el uso de herramientas computacionales, puede mencionarse a Dowrick, N. (1997), Taylor E. (2003) y Hanc, J; Tuleja S. (2005). En general, estas propuestas se centran en el comportamiento dual de la luz.

En el enfoque propuesto aquí, se construye una imagen del comportamiento de la materia, analizando la emergencia de aspectos ondulatorios a partir de características corpusculares, siendo ambos relativamente familiares a los estudiantes. Como caso paradigmático se considerará el experimento de la doble rendija. En dicho experimento, que puede visualizarse con herramientas computacionales, la transición entre el comportamiento corpuscular y ondulatorio se manifiesta a través de la aparición de un patrón de interferencia en la pantalla de detección al tender al dominio atómico.

Formulación de la suma de todas las alternativas de la mecánica cuántica

De acuerdo a la mecánica clásica, dada una partícula en un estado inicial I = $\mathbf{r}_i$ (t=0) y un estado final F= $\mathbf{r}_f$ (t=T), donde **r** (t) es el vector posición en función del tiempo t, existe una *única* trayectoria: $\mathbf{r}_{cl}$(t), que conecta ambos estados, la cual está dada por la solución de la *segunda ley de Newton*.

Las leyes de la mecánica clásica rigen el comportamiento de la materia a escala macroscópica, pero pierden su validez en el dominio atómico. En dicho caso la descripción adecuada es a través de las leyes de la mecánica cuántica. Estas leyes describen correctamente el comportamiento a escala

atómica e incluyen a la mecánica clásica como caso particular cuando las masas se vuelven macroscópicas.

El principal cambio conceptual en la mecánica cuántica, respecto de la mecánica clásica, es que dadas ciertas condiciones iniciales y finales, en la mecánica cuántica ya no se considera una *única* trayectoria $\mathbf{r}_{cl}$ (t), describiendo la evolución del sistema desde un estado inicial I hasta un estado final F, sino la *probabilidad* P de arribar a F partiendo de I, lo cual denotamos con P [I → F]. Ésta, a su vez, se obtiene evaluando el módulo cuadrado de otra cantidad: la *amplitud de probabilidad* A [I → F], es decir:

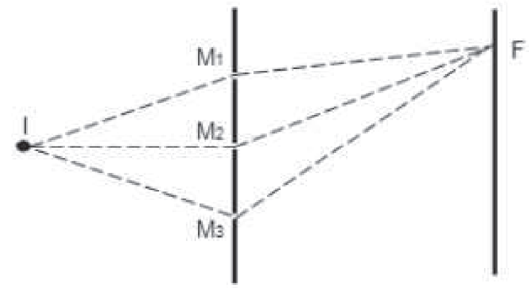
$$P\,[I \rightarrow F] = |A\,[I \rightarrow F]\,|^2, \qquad (1)$$

Para determinar la amplitud de probabilidad A [I → F] en la formulación STA utilizaremos el *principio de superposición,* que consideraremos como *primer postulado* de la mecánica cuántica.

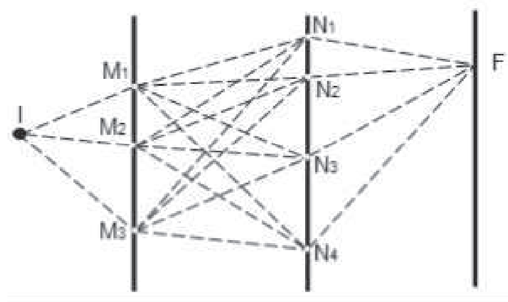
Para ejemplificar el concepto, consideraremos un experimento en el que una fuente I emite electrones en t=0. La llegada de los electrones en un tiempo T, a diferentes puntos F de una pantalla ubicada a cierta distancia de I es registrada mediante detectores montados sobre la misma. Nuestro objetivo es evaluar A [I → F] en t=T.

Ahora supongamos que entre medio de I y F insertamos otra pantalla M con varios orificios, que son los únicos lugares por donde los electrones pueden atravesarla, como se muestra en la Fig. (1a). En este caso, el principio de superposición postula que:

$$A_M(I \rightarrow F) = \sum_i A(I \rightarrow M_i \rightarrow F) \qquad (2)$$



(a)



(b)

Figura 1: El principio de superposición de la mecánica cuántica. La amplitud de probabilidad de ir desde la fuente I al punto de detección F en la pantalla es la suma de las amplitudes de ir por cada una de las diferentes alternativas. El número de alternativas o caminos crece con el agregado de más pantallas intermedias y más orificios en cada una, como se sugiere en (b), respecto de (a).

Es decir, la amplitud total es la suma (superposición) de las amplitudes de ir de I a F en t=T, a través de cada uno de los orificios de M. Por supuesto ahora estamos calculando la amplitud de propagación A_M con M entre medio de I y F, no la amplitud A original, pero como veremos esto es sólo un artificio para el cálculo.

Agreguemos ahora una segunda pantalla N con otra cantidad arbitraria de orificios (Fig. (1b)).

Aplicando nuevamente el principio de superposición obtenemos:

$$A_{M,N}(I \to F)=\sum_{i,j} A(I \to M_i \to M_j \to F)$$

Ahora aplicaremos el razonamiento de las "infinitas pantallas con infinitos orificios": Supongamos que agregamos un gran número de pantallas intermedias con una cantidad arbitraria de orificios en cada una. Luego, hagamos tender el número de orificios en cada pantalla a infinito, entonces cada pantalla tiende a desparecer! y la amplitud resultante tiende a la de la propagación original en el vacío A [I → F] en t=T, sin pantallas intermedias, es decir

$$A(I \to F) = \sum_{\substack{\text{todos los} \\ \text{caminos } r(t)}} A_{\substack{\text{cada} \\ r(t)}}(I \to F) \qquad (3)$$

La Ec. (3) es la expresión para obtener la amplitud de probabilidad A [I → F] de un electrón que es emitido por la fuente en t=0 y arriba a un punto F de la pantalla en t=T, atravesando el espacio vacío intermedio. Como puede observarse, consiste en sumar todas las amplitudes correspondientes a cada camino posible **r** (t) que conecte I con F, en un tiempo T. El resultado se muestra esquemáticamente en la Fig. (2).

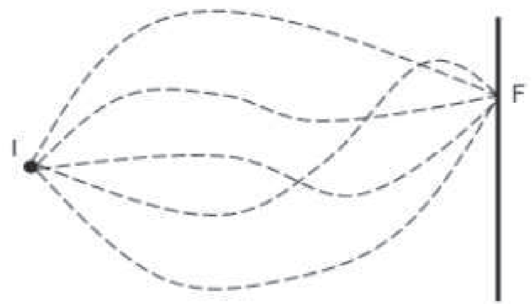


Figura 2: La amplitud de probabilidad de ir desde I a F a través del vacío es la suma de las amplitudes asociadas a todos los caminos posibles que conectan I con F (se muestran sólo algunos), en un tiempo T. Arribamos a este resultado mediante el razonamiento de las "infinitas pantallas con infinitos orificios" siguiendo la tendencia mostrada en las Figs. (1a y 1b), como se explica en el texto.

Un desarrollo matemático más formal que el razonamiento de las "infinitas pantallas con infinitos orificios" puede encontrarse, por ejemplo: Shankar, R. (1980).

Sin embargo, todavía debemos determinar la forma de calcular la amplitud para cada camino en la Ec. (3). Este será nuestro *segundo postulado*, que enunciamos a través de las siguientes reglas:

Primero, para cada trayectoria posible, **r** (t), que une el estado inicial I = $\mathbf{r}_i$ (t=0) con el estado final F= $\mathbf{r}_f$ (t=T), se calcula la acción correspondiente S [**r** (t)], donde:

$$S\,[\,r\,(t)\,] = \int_0^T L\,[\,r(t)\,]\,dt, \qquad (4)$$

siendo L [**r** (t)] el *Lagrangiano* del sistema, en este caso:

$$L\,[\,r(t)\,] = (1/2)\ m\ v(t)^2$$

es decir, la energía cinética (la energía potencial es cero en este caso). El lector no familiarizado con los principios de mínima acción de la mecánica clásica puede recurrir a la lectura de Goldstein, H. (1966). Para nuestros propósitos sólo basta recalcar que la trayectoria seguida por un objeto macroscópico (no relativista) es la que minimiza a la acción dada por la Ec. (4), que coincide con la predicha por las leyes de Newton.

Segundo, la amplitud asociada a esa trayectoria viene dada por:

$$A_{\text{cada } \mathbf{r}\,(t)}(I \rightarrow F) = \exp\,(i\,S\,[r\,(t)]\,/\,\hbar) \qquad (5)$$

siendo ħ = h / 2 π, donde h = 6.625×10^{-34} J. s, es la constante de Planck.

La expresión (5) muestra que cada camino que conecta I con F contribuye a la amplitud de probabilidad con un número complejo de módulo 1 y una fase dada por S [**r** (t)] / ħ, que, en general, será diferente para cada camino.

En resumen, las Ecs. (1), (3), (4) y (5) son la base de la formulación STA de la mecánica cuántica. La amplitud de probabilidad resultante (Ec. (3)) se obtiene al sumar cada una de las amplitudes asociadas a cada camino posible (Ecs. (4) y (5)). Luego se eleva al cuadrado el módulo de la amplitud de probabilidad resultante A [I → F], para obtener la probabilidad de arribar a F partiendo de I (Ec. (1)).

La suma sobre todos los caminos se formaliza mediante un procedimiento de discretización y pasaje al límite, que es una generalización del método habitual para evaluar integrales ordinarias (de ahí el nombre en inglés de método: path integrals). En la práctica sólo pueden evaluarse algunos casos sencillos como el de la partícula libre o el oscilador armónico.

En dichos casos se puede obtener una expresión analítica exacta. En los otros casos se tiene que recurrir a métodos aproximados, como teoría de perturbaciones o soluciones numéricas. Estos aspectos van más allá de los objetivos de este trabajo.

Para nuestros propósitos, reemplazando integrales y derivadas por sumas y cocientes de incrementos finitos, y los números complejos por vectores en el plano, se puede adaptar el formalismo al conocimiento de los estudiantes de la escuela secundaria. Esto simplifica los conceptos matemáticos involucrados, manteniendo los conceptos cuánticos.

Transición entre comportamiento clásico y cuántico

La mecánica cuántica predice los mismos resultados que la mecánica clásica cuando las magnitudes de las masas de los objetos considerados se vuelven macroscópicas. Más precisamente, es la relación entre la magnitud de la acción S y la constante de Planck (o ħ), lo que define el comportamiento de un sistema. Cuando S » ħ el sistema se considera cuántico, mientras que cuando S >> ħ domina el comportamiento clásico. Esto se debe, como veremos, al extremadamente pequeño valor de la constante de Planck, h, en un contexto macroscópico.

Una ventaja importante del enfoque STA, es que permite conceptualizar la transición entre el comportamiento atómico y macroscópico de una forma simple.

Podemos visualizar la amplitud resultante directamente graficando la suma de las amplitudes asociadas con las diferentes trayectorias. Esto es una suma de números complejos en el plano Re, Im, donde cada una tiene módulo unidad y una fase dada por S / ħ (Ec. (3)).

Mientras que en el dominio atómico, en general, se deberán considerar todos los caminos, en un contexto macroscópico la situación es diferente. En este caso se cumple: S >> ħ y el cambio de fase al pasar de una trayectoria a la otra es extremadamente grande. Por lo tanto, en promedio, al sumar los aportes correspondientes a trayectorias arbitrarias habrá una tendencia a anularse y no aportarán a la suma. Sin embargo esto no sucederá para *todas* las trayectorias ¿Que ocurre con la trayectoria clásica, que sigue la partícula macroscópica? Como se sabe, la acción es mínima en ese caso. Esto implica que al menos en un entorno extremadamente reducido alrededor de la trayectoria clásica, todos los caminos aportan aproximadamente con la misma fase. Es decir la trayectoria clásica es la única que prácticamente aporta a la suma. Por lo tanto, para una masa macroscópica, la probabilidad para la trayectoria de mínima acción tiende a uno y así obtenemos, a partir de la mecánica cuántica, vía la formulación de integrales de camino, los mismos resultados de la mecánica clásica.

En la Fig. (3) muestra una representación esquemática del proceso de suma, que ilustra el razonamiento anterior. En la misma se puede observar que los caminos cercanos a la trayectoria clásica contribuyen en fase (línea recta central), mientras los otros se cancelan unos con otros y por lo tanto no aportan a la amplitud de probabilidad (extremos).

Para los objetivos de nuestro trabajo es importante notar que en el caso de un sistema libre (V=0), incluso en el dominio atómico la trayectoria clásica y su entorno mantienen un rol especial. Sólo que ahora el entorno puede ser una región más extendida alrededor de la trayectoria clásica. De hecho, la amplitud de probabilidad (Ec. (3)), para el caso de una masa arbitraria (incluso a nivel atómico) y libre puede expresarse en una forma factorizada exacta, incluyendo sólo el aporte de la acción clásica: $S_{cl} = S[r_{cl}]$ en el exponencial y multiplicado por un factor *C* que tiene en cuenta las contribuciones en fase de los caminos en la vecindad de la trayectoria clásica, es decir:

$$A\,(I \rightarrow F) = C \exp\,(i\, S_{cl} / \hbar)\; (V=0) \qquad (6)$$

La demostración de la Ec. (6) nos aleja de los objetivos del trabajo y remitimos al lector interesado a la bibliografia (Shankar, R. (1980)).

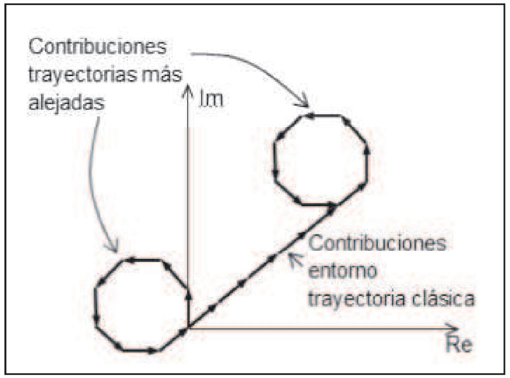


Figura 3: Representación esquemática de la suma de amplitudes de probabilidad. Cada amplitud es representada por un número complejo de módulo unidad y ángulo de fase S / ħ. El caso mostrado puede representar un objeto macroscópico en que sólo los caminos extremadamente cercanos a la trayectoria clásica aportan a la suma (línea recta central). Los otros caminos tienden a anularse mutuamente (extremos).

Experimento de la doble rendija

A escala macroscópica, el experimento de la doble rendija es el prototipo utilizado en enseñanza de la física para ilustrar el fenómeno de interferencia de ondas. Este caso básicamente consiste en un haz de luz láser que se hace incidir sobre una pantalla con dos rendijas delgadas. La imagen resultante se proyecta sobre una segunda pantalla, la cual exhibe un patrón de franjas alternadas de luz y sombra, debido a la interferencia de ondas que emergen desde ambas rendijas.

Si en vez de llevar a cabo dicho experimento con luz se lo hace con partículas, por ejemplo perdigones, lo que se observa es un diagrama de “no interferencia” que puede interpretarse en términos de las contribuciones de partículas provenientes de uno u otro orificio.

Es decir que a escala macroscópica, los comportamientos ondulatorio y corpuscular se encuentran bien diferenciados.

Sin embargo en el dominio atómico esta distinción carece de sentido. Incluso pierde significado la identificación univoca de los objetos atómicos con términos como el de onda o partícula, que han sido inventados para describir objetos macroscópicos.

El experimento de la doble rendija con electrones (http://youtube/oxknfn97vFE) muestra claramente las peculiaridades que se manifiestan a escala atómica, las cuales, como veremos se describen adecuadamente por medio de la mecánica cuántica.

En la figura 4 se muestra una serie de instantáneas a tiempos crecientes (desde a hacia d) de un experimento real de doble rendija llevado a cabo con electrones.

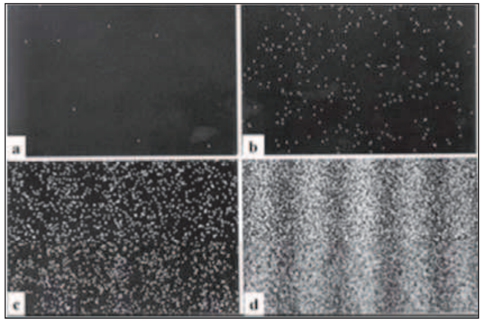


Figura 4: Experimento de la doble rendija con electrones. Secuencia de imágenes (reales) que muestran la formación de un patrón de interferencia (c-d), a partir de eventos de detección localizados y aparentemente aleatorios (a-b).

Por un lado, al principio los electrones son detectados en forma localizada sobre la pantalla, exhibiendo un carácter de partícula (paneles a y b). Además la localización de las detecciones parece distribuirse aleatoriamente. Sin embargo, a medida que transcurre el tiempo comienza a emerger un patrón de franjas claras y oscuras sobre la pantalla (paneles c y d). Es totalmente imposible interpretar esta distribución, considerando que los electrones atraviesan uno u otro orificio, como lo harían los perdigones macroscópicos. Por el contrario el patrón resultante está asociado a un fenómeno ondulatorio de interferencia.

La formulación de STA brinda un marco unificado en el cual los aspectos corpuscular y ondulatorio surgen naturalmente, junto con el concepto de longitud de onda asociada a una dada partícula. Analicemos estos aspectos en el caso del experimento de la doble rendija. Consideremos una fuente que emite electrones. A una cierta distancia se encuentra una pantalla con dos orificios. Se supone que en las pantallas el electrón está sujeto a una barrera de potencial impenetrable $V = \infty$, excepto en los orificios

y en el resto del espacio, donde el electrón es libre y por lo tanto es válida la Ec. (6). En la Figura 5 se muestra esquemáticamente dicho experimento.

La pregunta que queremos responder es: ¿Cuál es la probabilidad P (x) = $|A(x)|^2$ de que el electrón sea detectado en un punto a una distancia x respecto del centro de la segunda pantalla en un tiempo T dado, habiendo sido emitido por la fuente en t = 0? Por el principio de superposición la amplitud de probabilidad resultante A (x) será la suma de las amplitudes de probabilidad para ir por ambos orificios:

$$A(x) = A(O_1 \rightarrow x) + A(O_2 \rightarrow x) \qquad (7)$$

siendo:

$$A(O_1 \rightarrow x) = C \exp(i\, S_{cl}\,[O_1 \rightarrow x] / \hbar)$$

y $\qquad (10)$

$$A(O_2 \rightarrow x) = C \exp(i\, S_{cl}\,[O_2 \rightarrow x] / \hbar),$$

donde:

$$\alpha_1 = S_{cl}\,[O_1 \rightarrow y] / \hbar \text{ y } \alpha_2 = S_{cl}\,[O_2 \rightarrow y] / \hbar \qquad (8)$$

respectivamente, como se muestra en la Figura 5. Ya que el electrón el libre, la acción está formada solo por la energía cinética y por lo tanto tendremos para las fases:

$$\alpha_1 = (m\, v_1^2\, t) / (2\hbar) \text{ y } \alpha_2 = (m\, v_2^2\, t) / (2\hbar) \qquad (9)$$

Reemplazando $v_1 = d_1 / T$ y $v_2 = d_2 / T$ en las expresiones anteriores, desarrollando los cuadrados y considerando que $d_2 = d_1 + \Delta d$ se obtiene:

$$\alpha_1 = (m\, d_1^2) / (2\hbar T),$$

y

$$\alpha_2 = m\,(d_1^2 + 2\, d_1\, \Delta d + \Delta d^2) / (2\hbar T)$$

En la disposición experimental, la distancia entre pantallas es mucho mayor que la distancia entre rendijas, por lo que se cumple, de acuerdo a la Fig 5, que $\Delta d \ll d_{1,2}$ (osea $v_1 \approx v_2$). Esto implica que el término Δd^2 puede despreciarse frente a los otros en α_2, por lo cual se tiene para la diferencia de fase $\Delta\alpha$

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \approx (m\, d_1\, \Delta d) / (\hbar\, T) \qquad (11)$$

Reemplazando el cociente $d_1 / T = v$, la velocidad (media) del electrón y $\hbar = h / (2\pi)$ en la expresión anterior, se obtiene:

$$\Delta\alpha \approx 2\pi\, p\, \Delta d / h \qquad (12)$$

donde $p = m\, v$ es el valor medio de la cantidad de movimiento del electrón. La expresión anterior toma una forma particularmente simple y sugestiva si se escribe de la forma:

$$\Delta\alpha \approx 2\pi\, \Delta d / \lambda \qquad (13)$$

donde:

$$\lambda = h / p \qquad (14)$$

La Ec. (14) es la *fórmula de De Broglie*, que da cuenta del carácter ondulatorio de la materia.

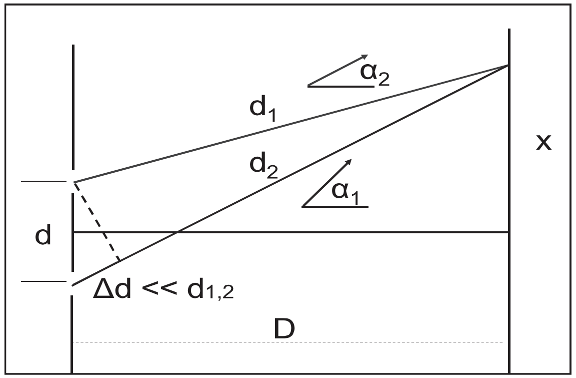


Figura 5: Ilustración esquemática de la experiencia de la doble rendija con electrones.

En términos geométricos la amplitud resultante (y por ende la probabilidad de detección) será máxima, en aquellos puntos donde se cumpla que ambas contribuciones están en fase, es decir que α_1 y α_2 difieren en

un número entero (semi-entero) de giros. Esto da lugar a la alternancia de máximos y mínimos en la pantalla.

Para obtener explícitamente la distribución de probabilidad P (x) en la pantalla simplemente evaluamos

$P(x) = |A(x)|^2 = A(x)\, A^*(x)$ utilizando las expresiones dadas por las Ecs. (7 a 10). Para A (x) se obtiene:

$$A(x) = A(x_1) + A(x_2) \approx C \exp(i\, \alpha_1)\, [1 + \exp(i\, \Delta\alpha)]$$

Multiplicando la expresión anterior por su complejo conjugado A* (x), obtenemos para P (x):

$$\begin{aligned} P(x) &\approx C^2\, [2 + \exp(i\, \Delta\alpha) + \exp(-i\, \Delta\alpha)] \\ &= 4\, C^2 \cos^2(\Delta\alpha / 2) \qquad (15) \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando la Ec. (13) y $\Delta d \approx x\, d / D$, como sugiere la Fig. (5), en la Ec. (15), se tiene:

$$P(x) \approx C' \cos^2 [2\pi\, d\, x / (D\, \lambda)] \qquad (16)$$

donde $C' = 4\, C^2$.

Las expresiones dadas en las Ecs. (13,14 y 16) permiten analizar el diagrama de interferencia emergente en el experimento de la doble rendija, y más importante mostrar cómo surge naturalmente en el formalismo una longitud de onda característica, que domina dicho comportamiento.

En este contexto queda claro que el valor de la longitud de onda de Broglie es determinante para la manifestación de aspectos ondulatorios o corpusculares, o lo que es lo mismo en la transición entre comportamiento cuántico y clásico. Si se repitiese el experimento con masas crecientes observaríamos que el patrón de interferencia tiende a desaparecer, ya que la longitud de onda de De Broglie tiende a cero, dando lugar a una distribución compatible con partículas que pasan por uno y otro orificio. Esto se manifiesta claramente en la Ec. (16), donde la longitud de onda de De Broglie aparece en el denominador. En efecto, al tender ésta a cero con el incremento de la masa, la distancia entre máximos y mínimos también lo hace, haciendo desaparecer el patrón de interferencia en la pantalla. Como se verá en el capítulo siguiente, el análisis de la distribución de probabilidad dado por la

Ec. (16) jugará un rol decisivo en la conceptualización de la transición entre el comportamiento cuántico y clásico por parte de los estudiantes.

Conclusiones

En este capítulo hemos propuesto una introducción alternativa a los principios de la mecánica cuántica en la escuela secundaria. A diferencia de las aproximaciones usuales al campo, se utiliza el formalismo de suma de todas las alternativas, desde un marco geométrico-vectorial simplificado.

La ventaja de este enfoque respecto a otros, es que permitiría *construir* con los estudiantes, la idea de transición entre el comportamiento corpuscular a ondulatorio al pasar del dominio macroscópico al atómico, respectivamente.

Se propone el empleo de simulaciones computacionales que ayudan a visualizar los conceptos involucrados, tomando como caso de estudio el experimento de la doble rendija con partículas de masas cada vez más pequeñas.

En el capítulo siguiente se presenta una propuesta, implementación y análisis de resultados en el marco de la TCC, para la enseñanza de aspectos básicos de mecánica cuántica en escuela secundaria, basado en los conceptos de la STA, desarrollados en este capítulo.

CAPÍTULO 5
ANÁLISIS DE LA CONCEPTUALIZACIÓN DE ASPECTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE ESCUELA SECUNDARIA

María de los Ángeles Fanaro– María Rita Otero

Introducción

En este capítulo presentamos parte de los resultados de una tesis doctoral en la cual se diseñó, implementó y analizó una secuencia de situaciones para enseñar aspectos fundamentales de mecánica cuántica a un grupo de estudiantes del último año de la escuela secundaria (Fanaro, 2009). La secuencia de situaciones fue elaborada en correspondencia con la propuesta que utiliza el enfoque de Feynman de Múltiples Caminos como técnica para calcular probabilidades, desarrollado en el capítulo anterior.

Realizamos el análisis de la conceptualización en base a la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990). En particular, se identifican los *teoremas en acto* utilizados por los estudiantes para abordar cada una de las situaciones propuestas y las inferencias que los estudiantes realizaron en base a la información que pudieron extraer y seleccionar de las situaciones planteadas. De esta forma, es posible comprender los obstáculos y las facilidades que tuvieron los estudiantes al abordar los conceptos cuánticos planteados.

La organización conceptual propuesta para estudiar con los estudiantes se representa en el siguiente esquema:

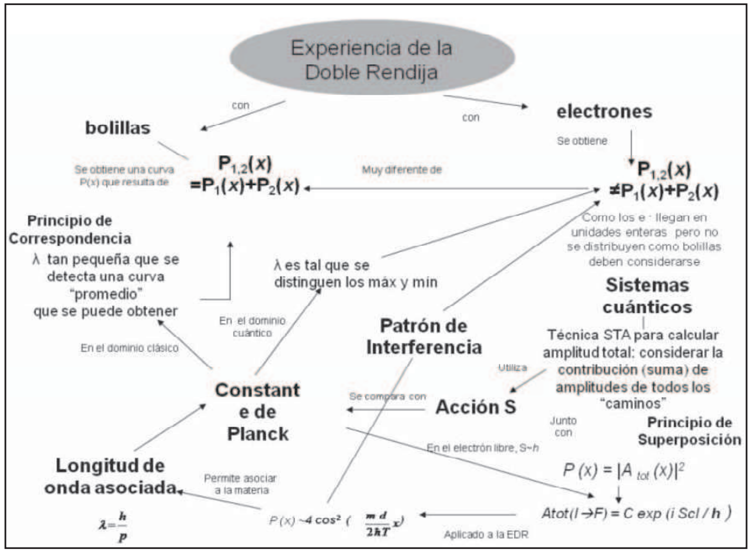


Fig. 1: Esquema de la estructura epistemológica de las situaciones.

En base a esta estructura, diseñamos una secuencia de seis situaciones y la implementamos en dos cursos de Física de características similares, con treinta (30) y veintiocho (28) estudiantes de 17-18 años de edad. Los estudiantes formaron grupos de estudio. Para regular apropiadamente la introducción de novedades y problemas clase a clase, se entregaba el material de estudio impreso a los estudiantes.

Se trataba de preguntas y problemas sobre los cuales los estudiantes conversaron con los integrantes de su grupo, arribaron a consensos y formularon respuestas escritas a las cuestiones planteadas. En ocasiones que, durante la resolución de las situaciones los estudiantes plantearon preguntas al profesor, éste las respondía con preguntas, devolviendo la responsabilidad de resolver, al alumno.

Cuando fue necesario, se ofrecieron síntesis escritas elaboradas por el profesor, para que los estudiantes leyeran, interpretaran y conversaran. Al final de la implementación de las seis primeras situaciones y antes de la evaluación se propuso a los estudiantes una última situación, en la cual se solicitaba realizar una síntesis personal escrita, utilizando los conceptos y sus relaciones, que habían sido tratados en toda la secuencia.

Analizando la *actividad* de los estudiantes en las situaciones, sus enunciaciones (verbales, gráficas, síntesis, etc.) y en la evaluación, se identificaron algunos de los *invariantes operatorios* que ellos utilizaron (teoremas y conceptos en acto) e inferencias realizadas.

La identificación de invariantes operatorios

Los *teoremas en acto* son esenciales en el análisis de la conceptualización y de los esquemas de los alumnos. Ellos pueden ser contradictorios, competir unos con otros, ser acomodados, separados y recombinados.

La identificación de los *invariantes operatorios* (IO) se realiza para cada situación, pues de ellas depende el conocimiento que construirán los estudiantes. Los IO aportan el sentido de los conceptos que se quieren enseñar.

Situación 1: "Imaginando la Experiencia de la Doble Rendija con bolillas".

Resolver esta situación requiere inicialmente a los estudiantes anticipar los resultados de la Experiencia de la Doble Rendija (EDR) con bolillas y luego, abordar la idea de probabilidad. Cuando los estudiantes afrontaron el problema de predecir en qué lugar de la pared se detectarían impactos, se identificaron los teoremas en acto siguientes: Ti_1: *"Si las bolillas son disparadas al azar, la distribución es uniforme"* y Ti_2: *"Las rendijas imponen la forma en la distribución".*

El siguiente fragmento de conversaciones entre los estudiantes, permite inferir el uso del teorema $\boldsymbol{Ti_1}$:

A8: Sí, una cosa, la rendija o lo que sea, se proyecta en la pared de madera con una línea así pero una bolita puede ir así y va a otro lugar porque dice en distintas direcciones (...) el disparador dice que era para cualquier lado (...) Acá te dice, una bolilla que se dirige hacia una de las rendijas puede rebotar en el borde y terminar en cualquier lugar, o sea, rebota y se va para cualquier lugar

El protocolo siguiente, que corresponde a otro grupo de estudiantes, muestra cómo ellos usan Ti_1 y Ti_2 alternadamente, sin lograr consenso. Parecería que el concepto en acto azar "llama" a Ti_1 en varias ocasiones, y esto conduce a ignorar el efecto de las rendijas sobre la probabilidad de impacto:

A_{11}: *¡¡¡Al azar, al azar!!! Si tira al azar, ¡¡llegan al azar!!*

A_{15}: *¿al azar?*

A_{11}: *y... con la misma dirección de las rendijas, con la dirección que son lanzadas... ¡¡¡Va a llegar en la misma dirección de la cual salen, la misma dirección!!! ¡Claro! La misma...*

Otro de los grupos que inicialmente también utilizó $\boldsymbol{Ti_1}$, continuó luego sus razonamientos en base a $\boldsymbol{Ti_2}$:

A_{27}: *Bueno, ehm. sí, pasan en todas las direcciones decía, no?*

A_{28}: *Sí... Pero en todas no van a pasar porque están las... las cosas... las rendijas...*

Ambos *teoremas en acto* se utilizarían alternativamente dependiendo de la inicialización del esquema que se use para enfrentar a la situación: si prevalece el concepto de azar, se usa Ti_1, y si se privilegian las rendijas, se usa Ti_2. Los estudiantes del mismo grupo, un poco más adelante en la conversación, siguen sin poder consensuar:

A_{13}: *¡No! van a caer todas en el mismo lugar, o sea... si te está diciendo que se disparan al azar...*

A_{14}: *¡¡¡Pará, pará!!!¿No ves? ¡¡Hay dos rendijas!!, dos rendijas... ¡Una y otra! como son dos, va a haber pelotitas... ¡Va a haber más acá! por eso va a haber más acá y acá que acá... ¡¡¡ponele, que están en las rendijas!!!*

Como se puede apreciar, aún los estudiantes que utilizaron el teorema en acto que establece que la distribución de impactos no es uniforme debido a la presencia de las rendijas, ($\boldsymbol{Ti_2}$) solían volver al teorema en acto de la uniformidad ($\boldsymbol{Ti_1}$), como si el concepto en acto azar les impidiera reconocer la presencia de las rendijas y pensar en términos probabilísticos.

El hecho de que en el enunciado se usaran los términos "aleatorio" y "azar" y que se expresara el desconocimiento del lugar de impacto de "cada" bolilla, obstaculizó inicialmente la comprensión de la distribución. Recién

después de introducir la definición de distribución de probabilidad y la curva, el azar perdió su posición dominante y los estudiantes interpretaron adecuadamente los máximos, y mínimos de la curva de probabilidad. Esto fue corroborado en las replicaciones sucesivas, pues al no hacer referencia al azar, ninguno de los estudiantes utilizó el $\boldsymbol{Ti_1}$.

El abandono de Ti_1, es clave para entender que las rendijas evitan una distribución uniforme de los impactos en la pared, que sólo se produciría si ellas no estuvieran. Además, es imprescindible para comprender que la distribución de probabilidad para las bolillas en la experiencia de la doble rendija, resulta radicalmente distinta cuando se utilizan electrones.

Luego de esta primer instancia de predicción usando bolillas, para interpretar la ley de probabilidad que rige este fenómeno, se definió el cociente: Nº de bolillas que impactan a una distancia "*x*" del centro de la pared dividido entre el número de bolillas disparadas en total (N), y se solicitó trazar la curva de P (*x*).

Al realizar el grafico, en general, los estudiantes no fueron consecuentes con sus predicciones iniciales, sino con las definiciones de probabilidad ofrecidas. Éstas modificaron la forma en que se estaban interpretando los resultados, es decir, cambiaron su entendimiento de la experiencia. Así en el trazado de curvas intervinieron los siguientes dos teoremas en acto: Tc_1: *Proporcionalidad entre nº de rendijas y máximos,* y Tc_2: *Superposición de efectos individuales en el centro.*

A continuación se presentan extractos de protocolos que muestran la utilización del teorema en acto Tc_1: *Proporcionalidad entre nº de rendijas y máximos,* que fue utilizado en casi todos los grupos. Este teorema llevaría a inferir que *"como hay dos rendijas, las bolillas copian la forma en la pared de madera y forman dos franjas de concentración, dos máximos en la curva de P (x)"*. Por ejemplo, el siguiente fragmento de conversación indica el uso de este teorema:

A_8: *Porque nos dimos cuenta acá que en esta zona es menos probable que haya bolillas*

A_6: *O sea, mucho menos probable que en el medio*

A_8: *... acá se va acercando a la zona más probable*

A_7: *(.) la curva es como la que hicimos antes porque va menos, menos, mas, mas, es gradual pero como son dos rendijas va a ser nada, nada, un poco, algo y en el borde como hay pared una cosa rara (...)*

A_6: *De esta forma la curva va muy baja porque la probabilidad es mínima.*

A_7: *En la curva se manifiesta que en la pared habrá más probabilidad de impacto en las líneas de las rendijas mientras que en el centímetro que dista entre línea y línea... pared la probabilidad de impacto es nula.*

Los gráficos realizados por estos estudiantes se presentan en la Figura 2 y son coherentes con la conversación mantenida:

A_6: *Rebota en el bordecito de la rendija y sale para cualquier lugar*

A_8: *Esta es la pared rebota en un bordecito acá y la hace desviar, pasa y la hace desviar...*

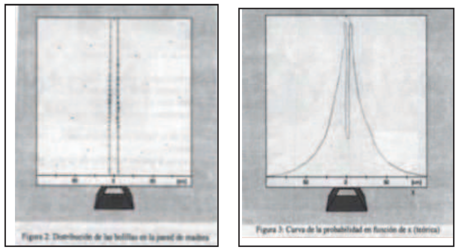


Figura 2 Izquierda: Distribución de las bolillas en la pared de madera realizados por estudiantes del Grupo 2. Derecha: curva de probabilidad en función de *x* realizados por los mismos estudiantes.

En cambio, un solo grupo de estudiantes, parece utilizar el teorema en acto Tc_2: *Superposición de efectos individuales en el centro* concluyendo que "*aunque hay dos rendijas, en el centro hay un máximo"*. Implícitamente estarían aceptando que el centro es el lugar que tiene el efecto de ambas rendijas. En la conversación, ellos habían acordado que la forma de la concentración sería en dos "bandas" relacionadas con la presencia de las rendijas. Sin embargo, cuando dibujaron los impactos, los concentraron en una sola región. En la curva de probabilidad, dibujaron un único máximo

central indicando que la probabilidad es máxima en el lugar correspondiente al medio de las rendijas, como se presenta en el siguiente protocolo:

A_{14}: *... que... el máximo que tenés, que supuestamente es el centro...*

A_{16}: *. indica máxima probabilidad*

A_{14}: *El máximo... coma que se encuentra en el centro indicado por la curva... una mayor concentración de bolillas en el centro de la pared.*

A_{15}: *muestra que habrá una mayor concentración... de bolillas en el centro de la pared!*

A_{14}: *sí, a medida que nos alejemos del centro de las rendijas*

A_{13}: *Mientras que... la probabilidad disminuirá... a medida que nos alejemos del centro de las rendijas*

Los estudiantes de este grupo realizaron los siguientes gráficos, acorde a lo que previamente habían conversado:

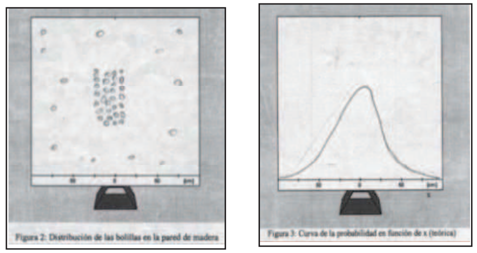


Figura 3. Izquierda: Distribución de las bolillas en la pared de madera realizados por el Grupo 3. Derecha: curva de probabilidad en función de x realizados por el mismo grupo.

Es importante destacar, que los estudiantes llegan a estos resultados sobre las curvas de probabilidades a partir del análisis cualitativo e imaginado de la experiencia, antes de realizar la simulación. Por otro lado, los protocolos muestran que los teoremas en acto Ti_1, Ti_2, Tc_1, Tc_2, son inestables y que la necesidad de dar una respuesta escrita común, genera un consenso que también es inestable. Sin embargo, desde un punto de vista didáctico las conclusiones de los estudiantes satisfacen las anticipaciones realizadas en el diseño de la secuencia, porque los dispone a afrontar el conflicto que se les plantea en la situación siguiente.

Situación 2: "Simulación de la EDR con software".

Esta situación proponía a los estudiantes como tarea inicial, simular la Experiencia de la Doble Rendija con el software "*Doppelspalt*" seleccionando bolillas como proyectiles, y contrastar las predicciones que habían formulado en la Situación 1. Seguidamente, los estudiantes tenían que anticipar si habría cambios en la distribución al cambiar las bolillas por electrones, y luego, simular la experiencia.

En el momento de anticipar, casi todos los estudiantes respondieron que los electrones se comportarían como las bolillas, tal como era esperado. Nosotros pensábamos que estas ideas entrarían en conflicto con los resultados de la simulación, y que este sería el punto de partida para la introducción de electrones como sistemas cuánticos. Sin embargo, cuando observaron los resultados e intentaron explicarlos, dos teoremas en acto fueron utilizados: Te_1 *"Los electrones tienen una cualidad especial: atravesar paredes"* y Te_2: *"Los electrones son bolillitas muy pequeñas"*.

El primer *teorema en acto*, permitió a los estudiantes inferir que el electrón puede "atravesar" la pared blindada, y el segundo, que la pequeñez del electrón con respecto a las rendijas, hace que éstos no se vean afectados por ellas. En ambos casos, estos teoremas en acto no favorecen la conceptualización correcta, puesto que no permiten abordar el carácter cuántico del electrón.

El teorema Te_1 fue utilizado solamente por uno de los grupos, que explícitamente aceptan que los electrones *pueden atravesar las paredes blindadas*, y entonces, interpretan que la pantalla colectora muestra una distribución uniforme de electrones. Por una razón enteramente diferente a la que habían dado para la distribución de las bolillas, los estudiantes insistían en la distribución uniforme de los impactos, también para los electrones. Ellos argumentaban que la distribución uniforme se debería a una propiedad de los electrones de "poder atravesar paredes blindadas", como se aprecia a continuación:

A_{10}– Los electrones son pequeñísimas bolillas de carga eléctrica, ¿se comportan de la misma forma que estos? (lee) No, ya que poseen diferentes propiedades y podrán penetrar lugares que las bolillas no pueden. Nos puso... ¿Por qué? Y... ¡¡¡los electrones pueden atravesar distintos materiales...!!! ¡Lo sabemos de química!

La percepción de los estudiantes estaba a tal punto guiada por este teorema en acto, que no podían notar la distribución en franjas de concentración de electrones en ciertos lugares, sino que insistían en que éstos se encontraban distribuidos por toda la pared. Como no actualizaban los conceptos ondulatorios estudiados en el año anterior, que les permitiría asociar la distribución con un patrón de interferencia, interpretaban el resultado en base a la "increíble" cualidad de los electrones para atravesar barreras. Esto, encubre el conflicto que se esperaba producir al considerar a los electrones como bolillas y la distribución en varias franjas observada, y obstaculizó la idea de electrón que se buscaba construir.

Por su parte, el teorema en acto Te_2: "*Los electrones son bolillitas muy pequeñas*" fue utilizado por un grupo de estudiantes, quienes desde la primera situación habían considerado el tamaño de las rendijas como un factor importante en el análisis. Cuando predijeron el resultado para los electrones, interpretaron que el reemplazo de bolillas por electrones se habría realizado dejando el resto de los parámetros iguales (ancho y separación de las rendijas). Por lo tanto, infirieron que al variar el tamaño de los proyectiles hasta llegar a electrones manteniendo constantes las dimensiones de las rendijas, el comportamiento debería ser como el de las bolillas:

A_{28}– No, porque... Claro... y que... hay mayor probabilidad en el centro! Porque. al ser más pequeño, es mayor el ángulo de donde. pueden rebotar! Va a ir por ejemplo...

A_{27}– Ya sé, pero por qué entran todos? Claro, todo es mucho más grandote ahora...

A_{28}– Que depende del tamaño...

A_{27}– No, porque al ser de menor tamaño. eh... varía el ángulo con que pasa... varía la curva, de probabilidad...

A_{28}– Y aumenta las zonas de probabilidad porque ahora es mucho más...

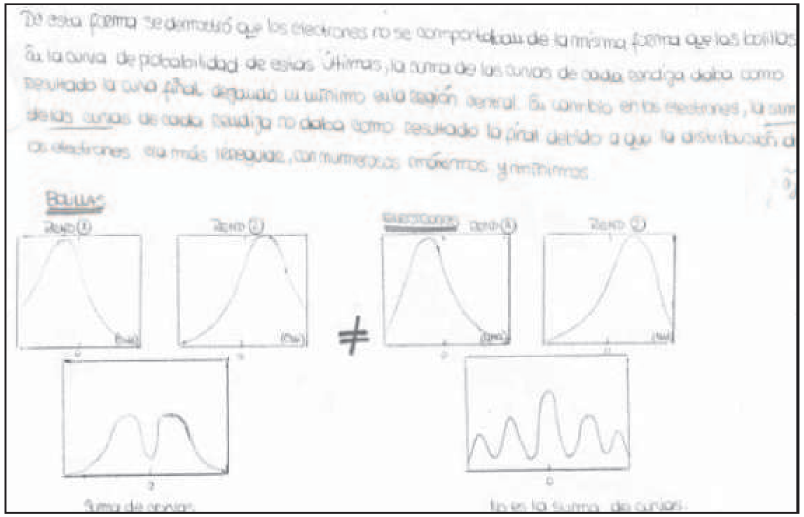
A_{28}– Para mí es lo mismo que... como si se. se agrandaran las dos rendijas. Porque al agrandar las rendijas, es como que las bolas sean más chiquitas, entonces se agrandan... Entonces funciona como si, se agrandaran las rendijas...

A_{27}– Entonces le ponemos funciona como si, se agrandaran las rendijas

A_{29}– Pongamos como si fuera un límite, las bolillas, o sea que cuando atraviesan son bollillas los electrones

En ambos casos, se esperaba que ellos percibieran la diferencia entre la distribución entre electrones y bolillas, tornando ineficaz el teorema en acto de los electrones como pequeñísimas bolillas capaces de atravesar lo que se interponga en su camino. En cambio, aunque las curvas de probabilidad que presenta el software para bolillas y para electrones son claramente diferentes, los estudiantes buscaban similitudes entre ellas, (por ejemplo la presencia de un máximo central en ambos casos) mostrando resistencia a abandonar el teorema de electrones como pequeñas bolillas.

Sólo cuando el profesor intervino señalando los mínimos, la diferencia de comportamientos entre bolillas y electrones fue percibida por los estudiantes. Se propuso a los estudiantes denominar al electrón "sistema cuántico" para señalar su comportamiento propio e inesperado. A partir de allí, se instaló la necesidad de buscar una explicación de la forma de la curva de "no suma". En la situación de síntesis personal, los estudiantes lograron reconocer las ideas de la suma y no suma para las bolillas y los electrones respectivamente, como se puede apreciar en la Figura 4:



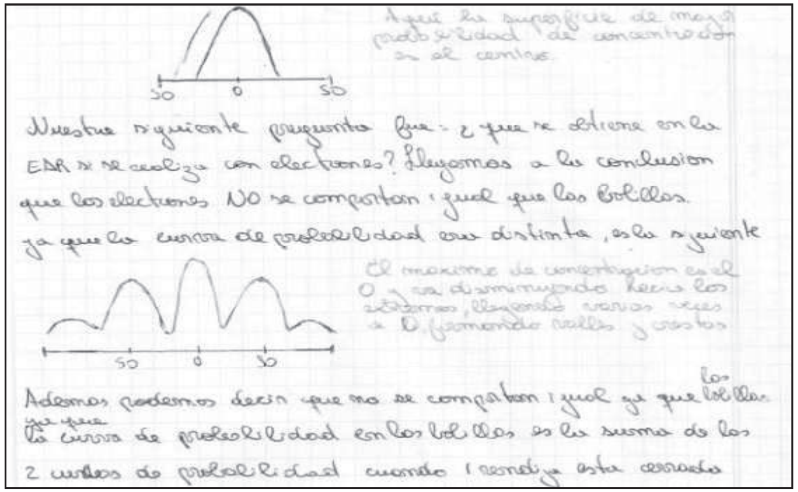


Figura 4: Síntesis personal realizada por dos estudiantes, donde remarcan las diferencias entre el comportamiento de las bolillas y los electrones en relación con la gráfica.

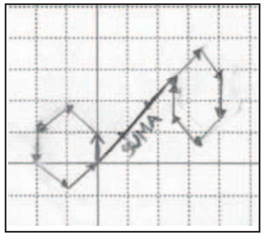
Situación 3 "La técnica Sumar Todas las Alternativas".

En esta situación se presentó a los estudiantes la técnica de Sumar Todas las Alternativas, denominándola como "Técnica STA". Se solicitaba a los estudiantes que ejecutaran una simulación diseñada con el software Modellus, para comparar los valores de acción de las funciones cercanas y alejadas de la función clásica (Fanaro, Otero y Arlego, 2012).

Aún cuando la simulación colaboró con la visualización de los resultados y los cálculos, los estudiantes tuvieron dificultades para establecer una relación entre las distintas funciones seleccionadas y sus correspondientes vectores asociados. Esta dificultad requirió la intervención del Profesor, quien propuso a los estudiantes reflexionar acerca los valores mostrados, proporcionó ejemplos y buscó generar consensos con todo el grupo de estudiantes.

Para la continuidad de la secuencia, era muy importante que los estudiantes comprendieran que hay un conjunto de funciones, cercanas a la función clásica cuyos vectores tienen dirección similar al vector de amplitud clásico, mientras que aquellas funciones que están más alejadas, tienen asociados vectores cuya dirección es muy distinta, y las consecuencias que esto tiene para la suma.

Para esto, como parte de la secuencia, se proporcionó un conjunto de ángulos correspondientes a los vectores asociados a funciones cercanas y alejadas de la función clásica, y se propuso a los estudiantes realizar la suma geométrica de los vectores asociados, colocando uno a continuación del otro. De esta forma, se buscaba mostrar que la suma de todos los vectores se reduce a un conjunto finito de ellos, correspondientes a las funciones cercanas a la clásica, mientras que el resto se anula. En este punto, los estudiantes resolvieron la tarea sin mayores problemas, obteniendo gráficos como los siguientes:



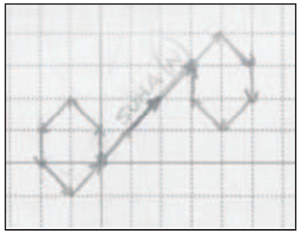


Figura. 5: Sumas de vectores realizadas por dos estudiantes, a partir de una tabla ofrecida por el profesor, donde se presentaban valores de distintas funciones x (t) y el ángulo en coordenadas polares.

Al realizar la suma, e intentar describir el resultado, los estudiantes utilizaron el teorema en acto T_{ava}: *"Los vectores asociados a funciones alejadas de la clásica se anulan"*. Si bien esto formaba parte del concepto que se quería construir, les faltaba formular una conclusión que tuviera en cuenta el aporte de los que no se cancelaban a la suma, y sí aportaban. Algunos fragmentos de la conversación que se identificaron como evidencia de este teorema en acto:

A_{27}: *¡Pero después de sumar los vectores siempre va a terminar en el último!*

A_{29}: *¡Ay, no sé qué tiene que ver las alejadas!*

A_{27}: *Como que al sumar las alejadas, las alejadas se. Cancelan, digamos.*

A_{28}: *¡Las más grandes!*

A_{27}: *'¡Las alejadas serían los ángulos más grandes!*

A_{28}: *Claro, se cancelan estas con estas también igual, porque si vos ves, que esto lo trasladás acá, te da… te da cero!*

A_{27}: *Pero… no entiendo a qué se refiere con la contribución a la suma.*

A_{28}: *Y, yo pondría que se cancelan los ángulos a medida que se alejan…*

A_{27}: *Sí… entonces llegamos a la conclusión de que se pueden anular todos los vectores alejados, y por lo tanto, la suma volvía a éste*

Entonces, el Profesor orientó a los estudiantes para que interpretaran cuáles eran los vectores que no se cancelaban, y contribuían a la suma. La formulación final de la expresión para la suma, también requirió de la interacción del Profesor con el grupo de clase para establecer que en el cálculo de la probabilidad, únicamente hay que considerar el aporte de aquellas x (t) cercanas a la clásica.

Situación 4: "Análisis de la transición cuántica-clásica: del electrón a las partículas libres".

Se propuso el análisis de la transición cuántico-clásica, sumando vectores para el caso de valores mayores de masa. En la misma simulación que en la situación anterior, los estudiantes podían seleccionar distintos "casos" que representaban valores de masas sucesivamente mayores. Se trataba de observar que aún aquellas funciones que se alejan muy poco de $x_{clas\ (t)}$, tienen vectores asociados cuyas direcciones son muy distintas comparadas con la del vector asociado a la clásica. Este efecto es más notable a medida que se seleccionan los casos de masa sucesivamente mayor, desde la masa del electrón, hasta un billón de veces este valor, que podría ser considerado *grosso modo*, como una masa macroscópica.

Se esperaba que los estudiantes concluyeran que para valores mayores de masa, el conjunto de funciones que se debían considerar en la suma resulta cada vez más pequeño. Se pretendía arribar a la conclusión de que en el caso extremo, de una masa "macroscópica", el único vector a considerar es el asociado a la función clásica, ya que todos los demás se anulan. Esto permitía a los estudiantes reconocer lo que ya sabían acerca de las leyes de Newton, y percibir así la coherencia y continuidad de los conocimientos estudiados.

Al abordar esta situación es posible reconocer la utilización de los siguientes teoremas en acto acerca de cambios al aumentar la masa: T_{cam1}: "*El aumento del valor de la masa no tiene consecuencias*"; y T_{cam2}: "*Al aumentar la masa, cambian los resultados encontrados para el electrón*".

El teorema en acto T_{cam1}, fue utilizado por uno de los grupos, y posiblemente esté relacionado con el teorema en acto T_{e2}: "*Los electrones son bolillitas muy pequeñas*" que ya había sido utilizado por este mismo grupo en la segunda situación. La inferencia fue: si los electrones son bolillas pequeñísimas, entonces, ¡las bolillas son como electrones de gran tamaño! Naturalmente esto es un obstáculo, porque indica que no comprendían la relación entre las funciones y los vectores asociados, como propone el modelo de Sumar Todas las Alternativas (STA) (Fanaro, Otero y Arlego, 2007). Posiblemente, el uso de este teorema en acto podría evitarse, si antes de ejecutar la simulación, ellos anticipan qué resultados arrojará la simulación, y luego, utilizan el software para corroborar o refutar sus predicciones.

En cambio, en las respuestas de otros grupos se nota que subyace el teorema en acto $T_{cam2,}$ que es necesario –aunque no suficiente– para comprender la transición cuántica-clásica. Éste debía ser enriquecido para poder concluir que con el aumento del valor de la masa la acción (S) también aumenta, y como el ángulo está dado por el cociente entre la acción S y la constante de Planck, pequeños cambios en la acción, significan grandes cambios en el cociente.

A_{14}: Ehhm, fijate en los casos... Veamos el efecto de la masa del cálculo de la probabilidad

A_{15}: ¡¡¡*Profe!!!! Acá...*

Profesor: Ahí ya pusieron el caso dos que es el caso de cien veces la masa del electrón. y hay que hacer lo mismo, hay que seleccionar, y analizar.

A_{14}: ¿Qué pasa con las alejadas? ¡Con equis te!

A_{15}: Paso, be... ¡vamos al siguiente!

A_{14}: Pará, ¿Cómo comparás?

A_{13}: A ver... acá, estas que están más alejadas. Alejadas... que pasa con la equis clas alejadas?... El ángulo va a ser, de probabilidad... Anotá: Alejado poné, ángulo de amplitud de probabilidad clásica... 4,91 para comparar, y el de probabilidad es... Si están cerca poné, ángulo de amplitud de probabilidad mínimo...

$A_{15:}$ 4.91? ¿Es lejos o cerca?

A_{13}: Cerca.

Este reconocimiento por parte de los estudiantes de que los resultados que arroja el modelo son distintos según se trate de electrón o de partículas de masa mayor, es más adecuado para la conceptualización buscada, aunque resulta insuficiente. Por lo tanto, requirió la intervención del Profesor para analizar en forma conjunta, ejemplos cinemáticos sencillos para comprender los resultados de la técnica STA para valores de masas macroscópicas.

En relación a la suma de los vectores en forma gráfica y su relación con la probabilidad, se identificó el uso de dos teoremas en acto: Tsv_1: "Si se suman menos vectores, la suma va a resultar menor" y Tsv_2: "Queda un solo vector en la suma, entonces, el resultado es más exacto".

El teorema en acto Tsv_1 utilizado solamente por uno de los grupos, indica que los estudiantes tenían problemas para establecer la diferencia esencial entre la suma de números y la de vectores. Por lo tanto, esto obstaculizó la formulación de conclusiones acerca del cálculo de probabilidades, como se puede apreciar en el siguiente fragmento:

A_{18}: Se sumarán... Los vectores que estén cerca... Que estén muy muy cerca, muy cerca! del vector original... Y... Acá, ¿de qué forma afecta esto el cálculo de p de x?

Profesor: Claro, acordate que la probabilidad... calcular el módulo del vector suma ¿está bien? ¿Te acordás la última parte de nuestra técnica? Era sumar todo...

A_{21}: ¿Era eso de h barra?

Profesor: Claro, eso... Tenés que sumar todos y después elevar al cuadrado, fijate ¿se ve afectado si yo tengo que sumar muchos o tengo que sumar pocos o no?

A_{18}: Sí porque si sumas pocos va a ser más chico el resultado que si sumás muchos...

A_{21}: Cuando se suman vectores... ¿ay, cómo ponemos?

A_{18}: Entonces ponemos, si sumás pocos vectores el resultado final será menor… que si sumás muchos.

En cambio, el teorema en acto Tsv_2: "Queda un solo vector en la suma, entonces, el resultado es más exacto" utilizado por un solo grupo, es más apropiado para conceptualizar la transición cuántico-clásico:

A_7: Entonces, ¿por qué se anulan?

A_{10}: Escucha una cosa, cuando es macroscópica, grande, se anulan todas.

A_6: No queda nada, pero cuando es microscópico…

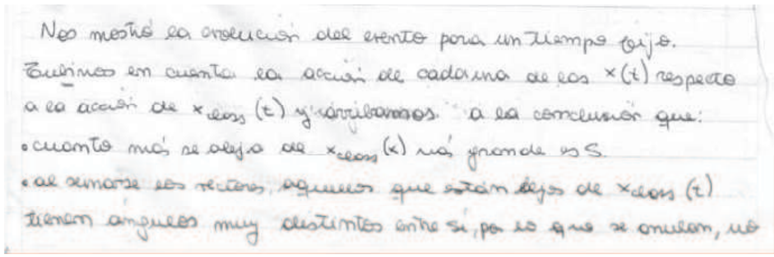
A_{10}: ¡Cuando es microscópica hay algunas que se anulan y las otras no!

A_9: A ver, cuando vos tenés microscópico, el vector clásico y vectores casi ahí. Esto es lo que se suma. Es lo que te está diciendo acá.

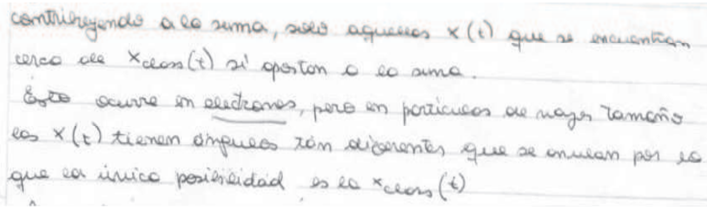
A_7: ¿Y los de lejos se anulan?

A_9: ¡Claro!

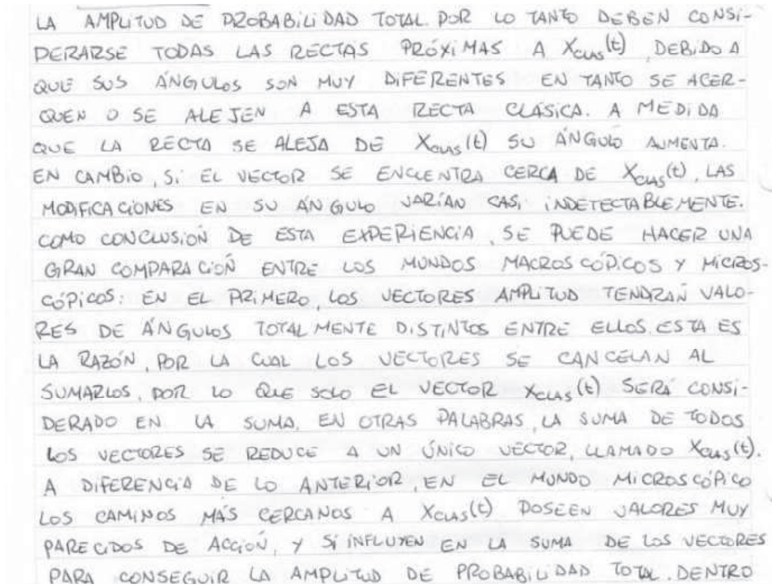
La utilización de este teorema en acto permite avanzar en la conceptualización porque permite validar las leyes de la Mecánica clásica, conocida por los estudiantes: si no actúan fuerzas sobre un cuerpo, su movimiento queda descripto por una relación lineal entre la posición y el tiempo. En la situación de síntesis personal, los estudiantes parecen haber consolidado estas ideas, como se puede apreciar en la Figura 6:



Nos mostró la evolución del evento para un tiempo fijo.
Tuvimos en cuenta la acción de cada una de los x(t) respecto
a la acción de $x_{clas}(t)$ y visualizamos a la conclusión que:
• cuanto más se aleja de $x_{clas}(t)$ más grande es S.
• al sumarse los vectores, aquellos que están lejos de $x_{clas}(t)$
tienen ángulos muy distintos entre sí, por lo que se anulan, no



contribuyendo a la suma, solo aquellos x(t) que se encuentran
cerca de $x_{clas}(t)$ sí aportan a la suma.
Esto ocurre en electrones, pero en partículas de mayor tamaño
los x(t) tienen ángulos tan diferentes que se anulan por lo
que la única posibilidad es la $x_{clas}(t)$



LA AMPLITUD DE PROBABILIDAD TOTAL POR LO TANTO DEBEN CONSI-
DERARSE TODAS LAS RECTAS PRÓXIMAS A $X_{clas}(t)$, DEBIDO A
QUE SUS ÁNGULOS SON MUY DIFERENTES EN TANTO SE ACER-
QUEN O SE ALEJEN A ESTA RECTA CLÁSICA. A MEDIDA
QUE LA RECTA SE ALEJA DE $X_{clas}(t)$ SU ÁNGULO AUMENTA.
EN CAMBIO, SI EL VECTOR SE ENCUENTRA CERCA DE $X_{clas}(t)$, LAS
MODIFICACIONES EN SU ÁNGULO VARÍAN CASI INDETECTABLEMENTE.
COMO CONCLUSIÓN DE ESTA EXPERIENCIA, SE PUEDE HACER UNA
GRAN COMPARACIÓN ENTRE LOS MUNDOS MACROSCÓPICOS Y MICROS-
CÓPICOS: EN EL PRIMERO, LOS VECTORES AMPLITUD TENDRÁN VALO-
RES DE ÁNGULOS TOTALMENTE DISTINTOS ENTRE ELLOS. ESTA ES
LA RAZÓN, POR LA CUAL LOS VECTORES SE CANCELAN AL
SUMARLOS, POR LO QUE SOLO EL VECTOR $X_{clas}(t)$ SERÁ CONSI-
DERADO EN LA SUMA. EN OTRAS PALABRAS, LA SUMA DE TODOS
LOS VECTORES SE REDUCE A UN ÚNICO VECTOR, LLAMADO $X_{clas}(t)$.
A DIFERENCIA DE LO ANTERIOR, EN EL MUNDO MICROSCÓPICO
LOS CAMINOS MÁS CERCANOS A $X_{clas}(t)$ POSEEN VALORES MUY
PARECIDOS DE ACCIÓN, Y SÍ INFLUYEN EN LA SUMA DE LOS VECTORES
PARA CONSEGUIR LA AMPLITUD DE PROBABILIDAD TOTAL. DENTRO

Figura 6: Dos ejemplos de producciones de estudiantes correspondientes a la situación de síntesis personal final, donde se puede apreciar que al finalizar la secuencia los estudiantes se aproximaron al concepto de suma de todas las alternativas para el electrón o para casos macroscópicos.

Situación 5: "Aplicación de la técnica STA para la EDR Reconstruyendo el diagrama de la EDR con electrones".

En esta situación se proponía retomar la cuestión generatriz de la secuencia: ¿Cómo e*xplicar los máximos y mínimos de P (x) en la EDR realizada con electrones?* Se propuso a los estudiantes analizar la aplicación de la técnica STA para los electrones de la EDR con la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón arribe a una di*stancia x del centro de la pantalla partiendo de la fuente?* Los estudiantes reconocieron sin dificultad la forma y las características de la función P (x) que se obtiene al aplicar la STA en la EDR, y la graficaron a partir de sus características funcionales –periodicidad, positividad y valores extremos– y de algunos puntos notables de la función que habían sido predeterminados. Retornando a la cuestión de la distribución de los electrones en la EDR se preguntó: ¿Qué puedes co*ncluir acerca de lo obtenido aplicando la STA de la Mecánica Cuántica respecto de lo que obtuvimos cuando simulamos la EDR con electrones en el software Dopplespalt?*

Se reconoce que un grupo de estudiantes utilizó el teorema en acto T_{mod1}: *"La curva teórica debe coincidir con la obtenida experimentalmente*". Esto llevó a que consideraran a las curvas idénticas, dejando de lado las diferencias, y de esta forma, cerrando la posibilidad de discutir acerca de la modelización, como se puede notar en el siguiente fragmento:

Profesor: ¿Claro, esto que obtuviste acá, se parece o no se parece a lo que obtuviste con el software?

A_{18}: Si, se parece…

Profesor: Bueno, se parece… ¿en qué sentido se parece?

A_{18}: En que tiene muchos máximos y mínimos

Profesor: Claro en cada uno de estos máximos, ¿qué significa que la probabilidad sea máxima? Que ahí… ¿cuántos electrones va a haber?

A_{18}: Y… Muchos

Profesor: ¿Entonces…?

A_{18}: y… hay muchos máximos y mínimos

A_{21}: Y en los máximos hay más probabilidad

A_{18}: Se parecen porque ambos tienen máximos y mínimos, y en los máximos hay más probabilidad de que impacten electrones

Por ejemplo, estos estudiantes escogieron una escala diferente a la dada para representar la variable independiente (x), y realizaron el gráfico que se presenta en la Figura 7, que no se corresponde con los valores que obtuvieron evaluando la expresión (donde los valores de los máximos son casi idénticos) sino con sus expectativas de hacer coincidir la curva con la que les había mostrado el software (donde había un máximo central y máximos laterales de menor valor):

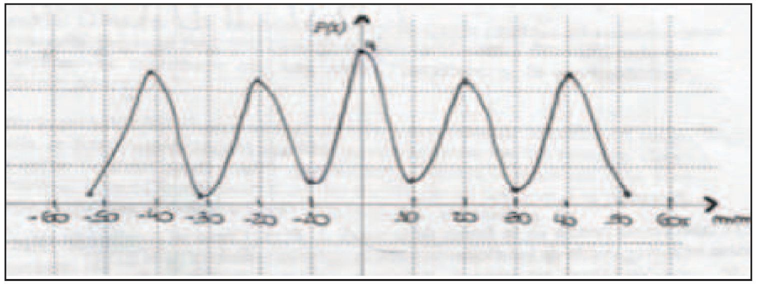


Figura 7: Gráfico realizado por una de las integrantes del Grupo 4, a partir de la expresión algebraica de P (*x*)

En cambio, inferimos que otros grupos utilizaron el teorema en acto que denominamos T*mod*$_2$: "*Como la curva teórica es sólo parecida en algún aspecto a la obtenida en la simulación de la experiencia, hay algo incorrecto*". Los estudiantes que utilizaron este teorema notaron que en las gráficas realizadas por ellos todos los máximos eran iguales en altura, mientras que la curva del software les había mostrado un máximo absoluto en el cero, y los otros máximos de menor valor (esto es reconocido en Física como interferencia modulada por la difracción). Esta idea no les permitía apreciar el valor de la modelización, es decir resaltar que la estructura de ambas curvas eran semejantes en lo relativo a los máximos y mínimos. Entonces fue necesaria la intervención del profesor para que ellos reconocieran que más allá de las diferencias, ambas gráficas representan el mismo fenómeno: la distribución de probabilidades para electrones en la EDR.

Presentamos una parte del diálogo donde se puede notar esto:

Profesora: *Estos resultados ¿Son parecidos, son diferentes? ¿Si son distintos, en qué? ¿Son iguales exactamente? ¿En qué se diferencian? Vos dijiste son similares. ¿Por qué?*

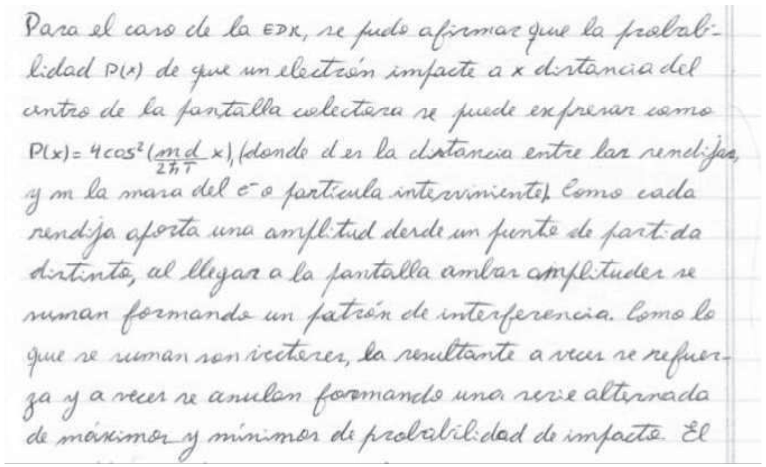
A_4: *Porque son cosenoidales, nada más que acá el máximo es parecido*

Profesora*: ¿Y en el otro que pasaba? ¿En la simulación?*

A_4: *Eran diferentes, muy diferentes.*

Esto conduce a revisar cómo se presenta la modelización en la Física escolar. No es común que en la escuela se presente un fenómeno para el cual los estudiantes deben construir un modelo matemático que se ajuste a una situación. Por el contrario, generalmente se presenta primero el modelo matemático –escasamente representado con la expresión matemática–, y se lo aplica sin reflexionar acerca de sus ventajas y limitaciones.

Como se puede apreciar en la Fig.8, que presenta fragmentos de síntesis personales, es posible interpretar que los estudiantes finalmente consiguieron aceptar la modelización planteada. En particular, en el segundo protocolo, es llamativo que el estudiante, aludiendo a la expresión obtenida con la técnica STA, expresa que "*es comprensible*" que en ciertos lugares de la pantalla haya máximos de probabilidad y en otros mínimos.


Para el caso de la EDR, se puede afirmar que la probabilidad P(x) de que un electrón impacte a x distancia del centro de la pantalla colectora se puede expresar como $P(x) = 4\cos^2(\frac{md}{2\hbar t}x)$, (donde d es la distancia entre las rendijas, y m la masa del e^- o partícula interviniente). Como cada rendija aporta una amplitud desde un punto de partida distinto, al llegar a la pantalla ambas amplitudes se suman formando un patrón de interferencia. Como lo que se suman son vectores, la resultante a veces se refuerza y a veces se anulan formando una serie alternada de máximos y mínimos de probabilidad de impacto. El

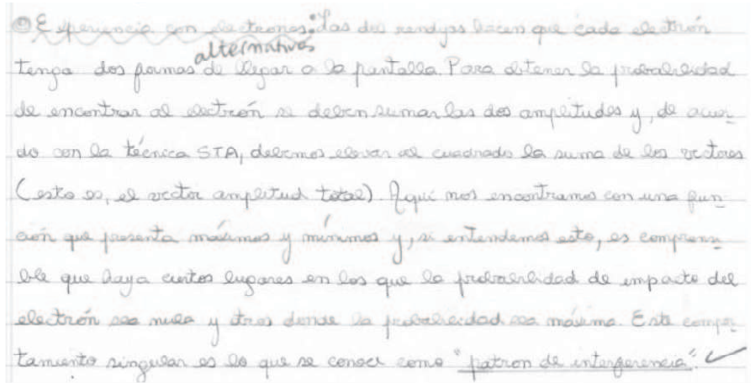

Experiencia con electrones: las dos rendijas hacen que cada electrón tenga dos formas alternativas de llegar a la pantalla. Para obtener la probabilidad de encontrar al electrón se deben sumar las dos amplitudes y, de acuerdo con la técnica STA, debemos elevar al cuadrado la suma de los vectores (esto es, el vector amplitud total). Aquí nos encontramos con una función que presenta máximos y mínimos y, si entendemos esto, es comprensible que haya ciertos lugares en los que la probabilidad de impacto del electrón sea nula y otros donde la probabilidad sea máxima. Este comportamiento singular es lo que se conoce como "patrón de interferencia".

Figura 8: Dos ejemplos donde los estudiantes, en la elaboración de sus síntesis personales, reconstruyen la expresión de la probabilidad para explicar los resultados de la EDR.

Situación 6: "Análisis de la transición cuántico-clásico en la EDR".

En la primer parte de esta situación, se solicitaba a los estudiantes predecir cómo resultaría el gráfico de P (x) con un valor de masa de 2000 veces la masa del electrón y luego graficar la función. Para realizar el gráfico de forma aproximada, era necesario analizar el argumento de la función trigonométrica, que como ahora es mayor, los máximos y mínimos de la curva se son mucho más cercanos entre sí, afectando esto a la distribución de probabilidad. Luego se pidió a los estudiantes que interpreten la función en términos de distribución en la pantalla colectora.

La mayoría de los grupos infirieron la forma de la nueva función apropiadamente, analizando el argumento de la nueva función trigonométrica y realizaron el gráfico y en base a éste, respondieron que "*estas partículas se distribuirán más cercanas unas de otras*", lo cual no generaba un conflicto productivo. En cambio, en uno de los grupos tanto su gráfico como sus respuestas, indicaron la utilización del siguiente teorema en acto, acerca de la validez de la Mecánica Cuántica: T_{vmc}: "*Al aplicar la STA en la EDR con masas mayores al electrón debe obtenerse la curva que se obtenía para bolillas*", como si naturalmente, un valor de masa de dos mil veces la masa del electrón, significa que se trata masas macroscópicas. Los estudiantes de este grupo, sin reflexionar acerca del cambio del argumento de la función, realizaron los cálculos (erróneamente) y ubicaron los puntos y los unieron obteniendo la curva para P (x) que se presenta en la Figura 9:

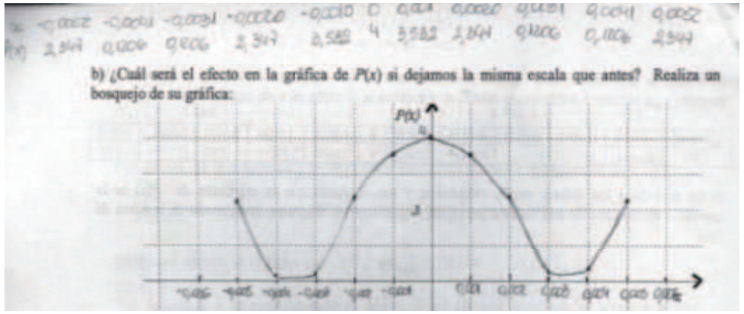


Figura 9: Curva de probabilidad teórica para la EDR para un valor de masa de 2000 veces la masa del electrón, realizada por un estudiante guiado por el T_{vmc}

Este teorema en acto muestra la dificultad de los estudiantes para comprender que aunque las leyes cuánticas tienen validez universal, hay un límite para el cual los efectos cuánticos dejan de ser perceptibles, detectables por los instrumentos experimentales.

Para visualizar la transición cuántico – clásico, se utilizó otra simulación con Modellus. Ésta resultó útil ya que permitió visualizar que al aumentar el valor de masa, cambia la distribución espacial de P (x), la curva periódica modelizada. Fue en esta etapa, que los estudiantes notaban que el gráfico que habían construido no coincidía con lo que les mostraba la simulación (que la función aumentaba su frecuencia a medida que se aumenta la masa). Luego de revisar sus cálculos, llegaron a la respuesta esperada.

Estos estudiantes finalmente lograron construir una buena idea de la transición mecánica cuántica-clásica, puesto que lograron realizar nuevas representaciones, distintas de las realizadas en clase, como el que muestra la Figura10, donde se relaciona la forma de la función mediante la longitud de onda, con su valor de masa:

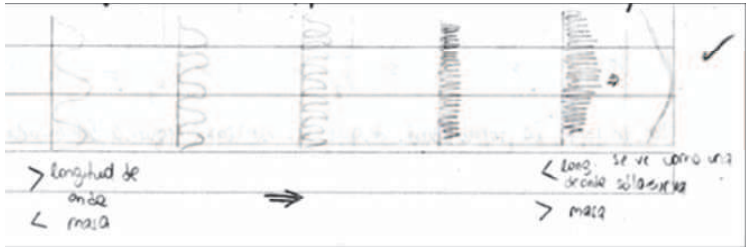


Figura 10: Representaciones gráficas elaboradas por la alumna A_{29}, en instancia de síntesis. Notemos que finalmente se concilia la modelización construida con la STA con la obtenida en la experiencia, no solo en los gráficos elaborados, sino en las inferencias expresadas: mayor longitud de onda implica menor masa y menor longitud de onda, menor masa. Finalmente la estudiante aclara que "*se ve como una sola curva",* que es como lo mostraba el software utilizado.

Conclusiones

El análisis realizado muestra que los estudiantes conceptualizaron las ideas relativas a suma y no suma de curvas de probabilidades, el electrón como sistema cuántico, la universalidad de la mecánica cuántica y la relevancia de la constante de Planck, en estrecha relación con los de la estructura epistemológica planteada en el capítulo anterior.

Este proceso de conceptualización, caracterizado por el uso de teoremas y conceptos en acto, la toma de información y las inferencias realizadas, fue posible, aunque con las marchas y contramarchas inherentes a toda conceptualización. Los invariantes operatorios utilizados al afrontar las situaciones planteadas, en ocasiones permitieron a los estudiantes avanzar en la conceptualización buscada, por ejemplo cuando se imaginaron la EDR –una experiencia que jamás habían realizado–, y lo hicieron exitosamente. También el concepto en acto de los electrones como pequeñas bolillas, fue decisivo para confrontar con los resultados de la experiencia mostrada. En otras ocasiones, el uso de ciertos teoremas obstaculizaron las inferencias buscadas, como cuando atribuían a los electrones la propiedad de atravesar barreras. En ambos casos, es claro el papel fundamental de estos invariantes operatorios en la conceptualización y en su evolución, es decir ellos determinan el sentido que se da al conocimiento.

Hemos mostrado la dinámica de los teoremas en acto, tal como lo propone Vergnaud. En ocasiones resultaron contradictorios, por ejemplo cuando debían predecir la distribución de las bolillas, compitieron unos con otros, luego fueron acomodados, separados y recombinados, para finalmente dirigir la acción con el fin de resolver la situación de predecir cómo es la probabilidad en función de la distancia al centro de la pantalla.

También hubo varios momentos en los cuales el profesor debió intervenir y formular nuevas preguntas que modificaron la selección de la información y consecuentemente las inferencias de los estudiantes, evitando dar la respuesta inmediata que los alumnos esperaban. Por ejemplo, cuando a los estudiantes les resultaba muy difícil abstraer la conclusión acerca de la suma de infinitos vectores, y la cancelación de la mayoría de ellos, fue muy importante la intervención del profesor planteando preguntas y ejemplos para auxiliar la construcción del concepto de suma constructiva.

Por otro lado, destacamos el carácter oportunista de la conceptualización, por ejemplo, cuando los estudiantes, luego de intentar –sin éxito– recuperar el concepto en acto acerca de los electrones como pequeñas bolillas, debieron abandonarlo y realizar inferencias pertinentes acerca de los resultados de la experiencia. Este fue un momento oportuno para que los estudiantes pudieran reformular los invariantes relativos al electrón que hasta ese momento, no habían sido cuestionados en la historia escolar de los estudiantes.

Este análisis reafirma que las situaciones que se plantean a los estudiantes no pueden ser producto de la improvisación, sino el resultado de un proceso de diseño, del análisis didáctico a priori y de prueba efectiva en aula produciendo una reformulación y un nuevo ciclo. Estas decisiones didácticas resultan clave en lo que los estudiantes lograrán conceptualizar.

Finalmente, destacamos que las situaciones producen la adaptación de los esquemas de los estudiantes, a partir de situaciones que producen la emergencia de los invariantes operatorios. Si son adecuados, la secuencia sigue su marcha y si no, como se documentó aquí reiteradamente, es posible plantear situaciones que los reorganicen, si se dispone de un profesor que puede anticiparse y que dispone de la formación y experiencia necesarias para el ejercicio de toda profesión. En ningún caso, se trata de un proceso simple, rápido o trivial, la conceptualización puede llevar largos períodos de la vida, e incluso, no lograrse o no concretarse.

CAPÍTULO 6
REFLEXIONES FINALES

MARÍA RITA OTERO

En los capítulos precedentes se describieron algunas investigaciones que se interesan por la conceptualización en matemática y física, a partir de una enseñanza apropiada, en la escuela secundaria.

En el Capítulo 2, se analiza la conceptualización de la función exponencial y su relación con los sistemas de representación. Si bien los resultados obtenidos en una secuencia de situaciones relativamente breve, parecen prometedores, también ponen de manifiesto el carácter inestable de los esquemas construidos y el retorno a los esquemas lineales, cuando los estudiantes perciben como nuevas a las situaciones que se presentan.

El hecho de que los alumnos resuelvan la misma situación de manera relativamente correcta, en un sistema de representación y no necesariamente en otro, muestra las dificultades que enfrenta la conceptualización, al menos cuando el conocimiento del campo conceptual es incipiente. Los resultados convalidan la definición de concepto aportada por Vergnaud, mostrando que los conceptos cambian si cambia el sistema de representación, que es un componente de la terna que define al concepto. Por otra parte, la reorganización de los esquemas que involucran a los diferentes sistemas de representación parece prolongarse en el tiempo.

Es decir, la conceptualización de la función exponencial requiere construir invariantes ligados a las variaciones no lineales y más específicamente, exponenciales, y además, nuevos invariantes, funcionales al proceso de simbolización. Estos procesos parecerían extenderse más allá de la etapa escolar, sobre todo si se aspira a su consolidación. En consecuencia, el hábito escolar de la inmediatez y la escasa importancia otorgada a la progresividad, conspiran contra la adquisición de estas y de otras nociones complejas.

En el Capítulo 3 se analizó el proceso de conceptualización de las funciones polinómicas de grado dos, en una secuencia didáctica que plantea situaciones similares, en el marco geométrico primero y luego, en el marco geométrico analítico. En el primer caso, las diferencias residen en el desarrollo de los procedimientos para el cálculo geométrico, principalmente en los relativos a la construcción y justificación de los conceptos: simetría y vértice.

Cuando se pasa al marco analítico, gráfico y funcional, se evidencian los diferentes niveles de competencia desarrollados por los estudiantes. Evidentemente, cambiar de marco produce una evolución de los conceptos frente a una situación aparentemente idéntica. Es notable como en el paso al marco analítico, los antiguos conceptos se utilizan en acto, pero con la notación y los procedimientos de cálculo del nuevo marco, por ejemplo, para formular expresiones analíticas equivalentes de la función.

La diferencia entre los tres grupos de estudiantes identificados, reside en la competencia, entendida como la capacidad de realizar una misma tarea de varias formas diferentes. La gran mayoría de los estudiantes parece dominar el marco analítico abandonando las nociones geométricas, algunos conservan además algunas nociones de geometría sintética y una pequeña cantidad hace convivir competentemente ambos marcos.

En el plano epistemológico, la geometría analítica es una conquista de la cultura humana y la eficiencia de las técnicas analíticas es incuestionable, así, los estudiantes que abandonan la geometría sintética, lo hacen por funcionalidad. Asumen en acto las propiedades geométricas y las verifican analíticamente.

Por otro lado, la escuela secundaria ha abandonado la enseñanza de la geometría con regla y compás, y si bien esto acarrea la desaparición de las razones de ser de la geometría analítica, los estudiantes están más habituados a sus técnicas, aunque en nuestro caso, las razones de ser se han construido.

Queda por saber si la riqueza de los esquemas que hemos identificado, sería la misma, sin la precedencia del tratamiento geométrico. Esto será objeto de una próxima investigación con un diseño de corte experimental, donde se controle la variable del dispositivo didáctico utilizado. Nuestra hipótesis es que el marco geométrico da sentido al marco analítico y que al plantear una continuidad y reciprocidad entre geometría sintética y geometría analítica, se obtendrían resultados significativamente diferentes, desde un punto de vista estadístico.

Es decir, que la geometría con regla y compás consolidaría la forma operatoria, colaborando en la construcción de un conjunto sólido de invariantes, que se usan, validan y explicitan más tarde, también en el

marco analítico. Mientras el paso posterior al marco analítico posibilita la enunciación y la simbolización en el sistema de representación que le es propio. Obsérvese que esto es lo que ocurrió históricamente con la algebrización de la geometría, iniciada por Descartes.

Por otro lado, este capítulo también reafirma las ideas de la TCC sobre el carácter progresivo y no lineal de la conceptualización, sobre sus continuidades y rupturas. Con el cambio de marco, los esquemas se adaptan y algunos conceptos se recuperan, modificados por la dialéctica esquema-situación.

Finalmente, en los capítulos dedicados a la conceptualización de nociones fundamentales de mecánica cuántica, se adopta la técnica de la Integral de camino de Feynman y se elabora una secuencia didáctica que se valida en la escuela secundaria. Una vez más, es preciso considerar la interacción esquema-situación para diseñar esta secuencia, y realizar un profundo análisis epistemológico a priori.

El análisis realizado muestra que los estudiantes conceptualizaron las ideas relativas a suma y no suma de curvas de probabilidades, el electrón como sistema cuántico, la universalidad de la mecánica cuántica y la relevancia de la constante de Planck, en estrecha relación con los de la estructura epistemológica planteada.

Los invariantes operatorios identificados permitieron a los estudiantes imaginar y realizar inferencias sobre la EDR –una experiencia que jamás habían realizado–. La secuencia aprovecha los teoremas en acto de los estudiantes, tales como: *los electrones se comportan como pequeñas bolillas*, y los confronta con los resultados de la experiencia.

También se pone de manifiesto que, como suele decir Vergnaud, *"la pensée fait feu de tout bois"*, considerando cómo ciertos teoremas obstaculizan las *"buenas"* inferencias, tal es el caso de atribuir a los electrones la propiedad –inexistente-de atravesar barreras.

Por otra parte, se advierte que a veces es imprescindible la intervención del profesor para orientar la selección de la información y consecuentemente las inferencias de los estudiantes. Tal es el caso de analizar que en la suma de infinitos vectores, la mayoría de ellos se cancelaría, prevaleciendo solo los que se encontraban en un entorno de la acción clásica. Es decir, la TCC no propone el descubrimiento en situación, ni resigna el papel del profesor, al que atribuye un lugar central de mediación en la elección y diseño de las situaciones y de ser necesario, en la clase. Esto exige del profesor un amplio conocimiento de su disciplina y competencias profesionales que le indiquen cuando y como actuar.

Como dijimos en la introducción, la Didáctica de las ciencias y las matemáticas deben mucho a Gérard Vergnaud, a sus ideas poderosas y a sus esfuerzos por enunciarlas de manera clara y sintética. Esperamos que las incipientes investigaciones presentadas sean inspiradoras de otras, que permitan profundizar nuestro conocimiento acerca de la adquisición de conceptos complejos, cuya enseñanza en la escuela es imprescindible, pero está por ahora, ausente.

REFERENCIAS

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19/2, pp. 221-266.

Dowrick, N. (1997). Feynman's sum-over-histories in elementary quantum mechanics. European Journal of Physics 18, 75-78.

Fanaro, M; Otero, M; Arlego M. (2007). El método de caminos múltiples de Feynman para enseñar los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica en la escuela secundaria. Caderno Catarinense de Ensino de Física. 24 (2) 233-260.

Fanaro, M. (2009) "La enseñanza de la Mecánica Cuántica en la Escuela Media". Tesis Doctoral. Doctorado Internacional en Enseñanza de las Ciencias, Universidad de Burgos. España.

Fanaro M., Otero, M. R y M. Arlego (2009). Teaching the Foundations of Quantum Mechanics in Secondary School: A Proposed Conceptual Structure. Investigações em Ensino de Ciências (IENCI), Vol. 14 (1) 37-64, Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil, 2009.

Fanaro M., Otero, M. R y M. Arlego (2012) Teaching Basic Quantum Mechanics in Secondary School Using Concepts of Feynman's Path Integrals Method. The Physics Teacher. American Association of Physics Teachers, Volumen 50:3 pp. 156-160.

Fanaro, M., Arlego, M. and Otero, M.R. (2014). The double slit experience with light from Feynman's Sum of multiple paths viewpoint. Revista Brasileira de Ensino de Física (en prensa 2014).

Goldstein, H. (1966). Mecánica Clásica. Madrid: Aguilar.

HANC, J.; Tuleja S. (2005). The Feynman Quantum Mechanics with the help of Java applets and physlets in Slovakia. 10th Workshop on multimedia in physics teaching and learning. Berlin.

OTERO, M.R. (2010) La Notion de Situation: analysée depuis la Théorie des Champs Conceptuels, la Théorie des Situations, la Dialectique Outil-Object et la Théorie Anthropologique du Didactique"; Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias 5 (1): 49-54.

SHANKAR R. (1980). Quantum Mechanics. New York: Plenum Press.

SUREDA P., Otero, M.R. (2013) Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. Educación Matemática; 25 (2): 89-118., México, Santillana

SUREDA, P (2012). Enseñanza de las Funciones Exponenciales en la Escuela Secundaria. Aspectos Didácticos y Cognitivos. Tesis doctoral.

TAYLOR E. (2003). A call to action. American Journal of Physics, 71 (5), 425.

VERGNAUD, G. (1990): La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170. La Pensée Sauvage, Marseille.

VERGNAUD, G. (1994): (Coord.), Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo? Editorial, Buenos Aires.

VERGNAUD, G. (1996): Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. En Revista Perspectivas, Vol. XXVI, Nº 1.

Vergnaud, G (2000) Lev Vygotski pédagogue et penseur de notre TEMPS. Paris Hachette Education. Traducción en portugués (2004) Lev Vygotski, Pedagogo e Pensador do Nosso Tempo. Porto Alegre; Geempa.

VERGNAUD (2007). Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. Actas Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática. ISBN 978-950-658-183-1. Tandil.

VERGNAUD, G (2013). *Pourquoi la théorie des champs conceptuels?* Infancia y Aprendizaje volume 36.2, 131-161.

Se terminó de imprimir en Impresiones Dunken
Ayacucho 357 (C1025AAG) Buenos Aires
Telefax: 4954-7700 / 4954-7300
E-mail: info@dunken.com.ar
www.dunken.com.ar
Abril de 2014